Предисловие

В 7 классе школьники начинают изучать новый раздел математики – алгебру. Поэтому цель обучения в 7 классе – развить интерес к решению алгебраических задач и показать применимость алгебраического подхода к другим изучаемым в школе предметам – геометрии, физике, химии и т. д. В курсе алгебры 7 класса закладываются основные понятия и навыки: математический язык, математическая модель, алгебраические выражения и их преобразования, одночлены и многочлены и действия с ними, уравнения и системы уравнений и способы их решения, функции и графики функций и т. п. В старших классах эти понятия и способы решения будут уточняться и дополняться, но основы закладываются именно в начале обучения (у семиклассников).

Данное пособие составлено для учебно-методического комплекта А.Г. Мордковича и др. (М.: Мнемозина) и рассчитано на 108 уроков (3 часа в неделю). Нумерация задач в поурочном планировании дана для задачника А.Г. Мордковича и др.

В пособии подробно рассмотрено содержание каждого урока. Несколько расширен изучаемый материал: дано понятие о нелинейных уравнениях и системах нелинейных уравнений, об уравнениях и системах уравнений, содержащих модули и параметры; рассмотрено построение графиков более сложных функций и уравнений и т. д. Такое расширение материала вполне доступно для семиклассников, развивает их интерес к изучению алгебры и дает более цельное представление об изучаемых темах. Приведенные дополнения также подготавливают школьников к углубленному изучению математики в старших классах.

Для контроля знаний приведены контрольные работы. Для коррекции результатов контрольных работ предусмотрены зачетные работы. Задания работ имеют три уровня сложности. Даже для получения высшей оценки у учащихся имеется значительная свобода в выборе задач. Решение более сложных задач поощряется дополнительными баллами. В конце обучения проводится итоговая контрольная работа, в которой проверяются навыки и знания учащихся по основным (базовым) темам. Все контрольные и зачетные работы приведены с ответами. Для наиболее сложных задач даны подробные решения.

С целью текущего контроля знаний и успеваемости учащихся почти на каждом уроке предусмотрены небольшие самостоятельные работы, письменные опросы, тесты. Этот вид контроля способствует своевременному усвоению и пониманию базовых понятий и навыков вычислений в рассматриваемой теме.

В целом пособие составлено с целью оптимизировать подготовку учителя к уроку и сэкономить его время, может быть использовано для проведения уроков в классах с разным уровнем подготовки и заинтересованности, а также для проведения факультативных занятий, олимпиад и математических вечеров.

Рекомендации к проведению уроков

Предлагаемые соображения носят исключительно **рекомендательный характер**. Определяющими факторами являются подготовленность класса, его работоспособность, интерес к изучению алгебры. Ни одно планирование **не может быть догмой**. Каждый урок должен способствовать обучению школьников. Поэтому пусть каждый отдельный школьник лучше усвоит тот материал, который в состоянии понять, чем не воспримет ничего. В последнем случае непонимание и незнание принимают **хронический характер**, который определяет **полный провал** в изучении алгебры и в старших классах.

Данное пособие рассчитано на 108 уроков (3 часа в неделю). Однако материал пособия является **избыточным** (в расчете на очень подготовленный, сильный класс). При необходимости часть материала опускается или излагается достаточно поверхностно. Более сложный материал может быть использован при проведении факультативных занятий, олимпиад, математических вечеров.

С учетом несобранности и неорганизованности семиклассников желательно иметь в расписании **сдвоенные уроки** алгебры. Тем более подобные уроки необходимы при написании контрольных работ и тематических зачетов.

Поурочное планирование включает четыре вида занятий:

1) урок на изучение нового материала;
2) урок на отработку и закрепление пройденного материала;
3) контрольная работа;
4) тематический зачет.

Рассмотрим эти виды занятий.

1. Урок на изучение нового материала включает семь этапов.

I. Сообщение темы и цели урока (~1–2 мин). Необходимо донести до учащихся необходимости данной темы (области применения этих знаний) и цель урока (навыки и приемы, которые должны быть усвоены в ходе проведения урока).

II. Изучение нового материала (основные понятия) (~15 мин) возможно двумя путями:

1) С помощью подсказок, примеров и наводящих вопросов учителя школьники самостоятельно (при фронтальной работе) приходят к

основным понятиям и правилам рассматриваемого раздела алгебры. Затем учитель уточняет и корректирует высказывания учащихся. Однако, учитывая, что изучение алгебры начинается именно в 7 классе и все понятия школьникам еще незнакомы, такой путь можно рекомендовать для самых простых тем или отдельных фрагментов урока.

2) Учитель формулирует основные понятия и правила, иллюстрирует их примерами. Такой подход требует меньше времени, но менее эффективен (всегда полезнее решить задачу самостоятельно, чем просто узнать ее решение).

III. Контрольные вопросы по изучаемому материала задает учитель для проверки усвоения и понимания возникающих понятий, терминов, алгоритмов решения задач и т. д. (~5 мин). Вопросы могут задаваться как индивидуально, так и фронтально. Следует обратить внимание именно на понимание, а не на механическое запоминание. Для этого рекомендуется кроме определения попросить школьника привести соответствующие примеры или объяснить пример учителя. При необходимости к обсуждению можно привлечь всех учащихся класса.

IV. Задание на уроке дает учитель из числа наиболее характерных типовых задач (~15 мин). Задание может выполняться:

1) Самостоятельно учащимися всего класса в тетрадях с последующим разбором кем-то из школьников (например, первым выполнившим задание) у доски. При этом желательна активная работа всех учащихся: поиск ошибок в решении на доске, вопросы по решению, другие способы решения и т. д.

2) В виде диалога соседей по парте: решение задания, обмен тетрадями и взаимная проверка заданий.

3) Работа у доски одного или нескольких школьников. После выполнения задания возможен как взаимоконтроль учащихся у доски, так и подключение к проверке решения всего класса. При этом, разумеется, происходит и диалог учителя с отвечающим у доски.

V. Задание на дом дается учителем из числа задач, аналогичных рассмотренным в классе. Задание должно быть рассчитано на 35–40 мин. Желательно, чтобы учащиеся рассматривали различные способы решения задачи. Это приводит к активизации мышления школьников, творческому пониманию материала и т. д.

При обучении (в том числе при выполнении домашнего задания) необходимо приучить школьников фиксировать непонятый материал: теоретические понятия, нерешенные задачи и т. д. Полезно научить школьников формулировать, что именно им непонятно. Четко сформулированный вопрос – это уже половина ответа на вопрос.

Особенно такие навыки понадобятся учащимся в старших классах. Разумеется, все возникающие вопросы должны получить ответы и быть разобраны на ближайшем занятии.

VI. Во многих уроках предусмотрены **творческие задания**. Эти задания отличаются от приводимых в учебнике или большей сложностью, или нестандартностью формулировки задания, или новым способом решения. Поэтому рассмотрение подобных заданий очень полезно. В зависимости от уровня подготовки класса эти задания могут быть рассмотрены:

1) со всеми учащимися в классе или в виде домашнего задания;

2) дифференцированно с наиболее подготовленными школьниками или на уроке, или в качестве домашнего задания;

3) на внеклассных занятиях (факультативы, дополнительные занятия, кружки);

4) во время проведения олимпиад, недель математики, математических боев и т. д.

Творческие задания выполняются в пределах времени, отведенного на урок.

VII. Подведение итогов урока (~1–2 мин) проводится учителем с учетом самостоятельной работы школьников, ответов у доски, обсуждения, дополнений и т. д. За все эти виды деятельности выставляются оценки с их кратким обоснованием.

2. Урок на отработку и закрепление пройденного материала отличается этапом II. На этом этапе предусмотрено повторение и закрепление пройденного материала (~20 мин). Прежде всего оно включает ответы на вопросы по домашнему заданию. Желательно, чтобы такие ответы давали бы сами учащиеся. Вопросы могут включать в себя непонятые термины, определения, алгоритмы и другой теоретический материал. Также может возникнуть и необходимость разбора нерешенных задач.

При этом желательна максимальная активность всего класса. Школьник, объясняя и комментируя свое решение задачи, лучше усваивает изучаемый материал. Кроме того, его объяснения могут оказаться более удобными для понимания ровесниками. Ориентировочное время на такую стадию этапа II ~5–10 мин.

На второй стадии этого этапа предусмотрен контроль усвоения материала (письменный опрос, самостоятельная работа или тест), на который отводится ~10–15 мин.

Письменный опрос содержит 1–2 теоретических вопроса и 1–2 задачи, аналогичные заданию в классе и домашнему заданию. При проверке ответа на теоретический вопрос следует в первую очередь обращать внимание на понимание, а не на строгость и четкость формулировок (к ним учащиеся подойдут в старших классах).

Самостоятельная работа включает 2–3 типовые, характерные, необходимые для дальнейшего изучения алгебры задачи.

Тест содержит 3–4 задачи, для каждой из которых приводится несколько вариантов ответа. Однако тестов дано очень мало. Это связано с тем, что учащиеся 7 класса часто ошибаются. Тестирование не дает возможности выявить причину ошибки: непонимание темы, невнимательность, арифметические ошибки, пробелы в предыдущем материале и т. д. Поэтому тестирование целесообразно в более старших классах (да и то по определенным темам).

3. По каждой изучаемой теме проводится **контрольная работа**. Она составлена в 6 вариантах различной сложности (варианты 1, 2 – самые простые, варианты 3, 4 – сложнее, варианты 5, 6 – самые сложные). Вариант содержит 6 задач, из которых 2 последние чуть сложнее предыдущих. Как правило, задачи вариантов подобны задачам, решаемым в классе и дома. Выбор вариантов может быть сделан или самими учащимися (с учетом их самооценки), или учителем (с учетом успехов школьника).

Оценка контрольной работы может быть выполнена следующим образом: в вариантах 1, 2 за любые пять решенных задач ставится оценка «5», за четыре задачи – оценка «4», за три задачи – оценка «3». Шестая задача дает учащимся некоторую свободу выбора и определенный резерв. При таких же критериях за решение заданий вариантов 3, 4 добавляется 0,5 балла; за решение заданий вариантов 5, 6 – добавляется 1,0 балл (учитывая большую сложность их заданий).

Контрольная работа рассчитана на два урока (на наш взгляд, оптимальное время на написание работы). Учащиеся 7 класса еще несобранны, медлительны, неорганизованны. Поэтому одного урока на проведение контрольной работы недостаточно. При необходимости за счет уменьшения количества задач или за счет некоторого либерализма при проверке контрольная работа может быть проведена и за один урок.

После каждой работы проводится ее анализ и разбор наиболее сложных задач. Ко всем заданиям вариантов 1–4 приведены ответы, задачи вариантов 5, 6 разобраны. Полезно после контрольной работы вывешивать на стенде в классе разбор заданий всех вариантов. Заметим, что из-за дифференциации вариантов и заданий возможна некоторая необъективность оценок за контрольную работу.

4. Чтобы устранить подобную необъективность, дать возможность повышения оценок школьниками, еще раз повторить и закрепить пройденную тему, помимо контрольной работы проводится тематический зачет. Зачет составлен в двух равноценных вариантах. Задания каждого варианта разделяются по сложности на три блока: блок А – самые простые задачи, блок В – более сложные задачи и блок С – самые сложные задачи. Каждая задача из блока А оценивается в 1 балл, из В – в 2 балла, из С – в 3 балла. Поэтому за правильное решение всех задач блока А можно получить 7 баллов, блока В – 8 баллов и блока С – 9 баллов (всего 24 балла). Оценка «3» ставится за 6 баллов, оценка «4» – за 10 баллов, оценка «5» – за 14 баллов.

В заключение отметим, что цель изучения алгебры в 7 классе не только освоить изложенный материал и навыки решения задач, но и привить правильный подход к обучению, развить мышление, пробудить интерес к точным наукам.

Тематическое планирование учебного материала для комплекта А.Г. Мордковича и др. «Алгебра–7»

Из расчета 3 ч в неделю, всего 108 ч в год.

Глава 1. Математический язык. Математическая модель	**13 ч**
§ 1. Числовые и алгебраические выражения	4 ч
§ 2. Что такое математический язык	2 ч
§ 3. Что такое математическая модель	2 ч
§ 4. Линейное уравнение с одной переменной	3 ч
§ 5. Координатная прямая	2 ч
Глава 2. Линейная функция	**14 ч**
§ 6. Координатная плоскость	2 ч
§ 7. Линейное уравнение с двумя переменными и его график	4 ч
§ 8. Линейная функция и ее график	4 ч
§ 9. Линейная функция $y = kx$	2 ч
§ 10. Взаимное расположение графиков линейных функций	2 ч
Глава 3. Системы двух линейных уравнений с двумя переменными	**12 ч**
§ 11. Основные понятия	2 ч
§ 12. Метод подстановки	3 ч
§ 13. Метод алгебраического сложения	3 ч
§ 14. Системы двух линейных уравнений с двумя переменными как математические модели реальных ситуаций	4 ч
Глава 4. Степень с натуральным показателем и ее свойства	**7 ч**
§ 15. Что такое степень с натуральным показателем	1 ч
§ 16. Таблица основных степеней	1 ч
§ 17. Свойства степени с натуральными показателями	2 ч
§ 18. Умножение и деление степеней с одинаковыми показателями	2 ч
§ 19. Степень с нулевым показателем	1 ч
Глава 5. Одночлены. Арифметические операции над одночленами	**8 ч**
§ 20. Понятие одночлена. Стандартный вид одночлена	2 ч
§ 21. Сложение и вычитание одночленов	2 ч
§ 22. Умножение одночленов. Возведение одночлена в натуральную степень	2 ч
§ 23. Деление одночлена на одночлен	2 ч
Глава 6. Многочлены. Арифметические операции над многочленами	**17 ч**
§ 24. Основные понятия	2 ч

§ 25. Сложение и вычитание многочленов	2 ч
§ 26. Умножение многочлена на одночлен	2 ч
§ 27. Умножение многочлена на многочлен	3 ч
§ 28. Формулы сокращенного умножения	2 ч
§ 29. Деление многочлена на одночлен	2 ч
Глава 7. Разложение многочленов на множители	20 ч
§ 30. Что такое разложение многочленов на множители и зачем оно нужно	1 ч
§ 31. Вынесение общего множителя за скобки	3 ч
§ 32. Способ группировки	3 ч
§ 33. Разложение многочленов на множители с помощью формул сокращенного умножения	6 ч
§ 34. Разложение многочленов на множители с помощью комбинации различных приемов	3 ч
§ 35. Сокращение алгебраических дробей	3 ч
§ 36. Тождества	1 ч
Глава 8. Функция $y = x^2$	7 ч
§ 37. Функция $y = x^2$ и ее график	2 ч
§ 38. Графическое решение уравнений	2 ч
§ 39. Что означает в математике запись $y = f(x)$	3 ч

I полугодие

Глава 1. Математический язык. Математическая модель

§ 1. Числовые и алгебраические выражения

Урок 1. Числовые выражения

Цель: напомнить понятие числового выражения и основные правила их вычислений.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение материала

При изучении арифметики вы рассмотрели положительные и отрицательные целые и дробные числа; познакомились с простыми уравнениями, рассмотрели некоторые геометрические фигуры; узнали о координатной прямой и координатной плоскости и т. д. Разумеется, арифметикой не исчерпывается вся математика. Современная математика чрезвычайно обширна и сложна.

Слегка вспомним историю развития человечества. Первобытные люди имели примерно одинаковое знание (или незнание) об окружающем мире. Но уже почти сразу стала выделяться группа людей (вожди, жрецы и т. д.), которая обладала большими знаниями и опытом. По мере накопления знаний и их усложнения познавать мир могла только специализированная группа людей (условно назовем их учеными), имевших большие познавательные способности, интерес и упорство. При этом познание распространялось на весь окружающий мир, который воспринимался как единое целое (что соответствует действительности).

С усложнением знаний и увеличением их объема познавательная деятельность дифференцировалась. Появились отдельные области науки: математика, физика, химия, биология и т. д. Отдельные гении: Карл Гаусс (1777–1855), Исаак Ньютон (1643–1727), Леонард Эйлер (1707–1783) и другие ученые вплоть до конца XIX века еще могли творить в самых разнообразных направлениях науки. Например, величайший русский математик Л. Эйлер знал греческий, латинский, немецкий, французский и другие языки. Известны его труды в математике, физике, астрономии, химии, географии, ботанике, анатомии, медицине и некоторых других областях науки и техники. Заметим, что было опубликовано свыше 860 (а с учетом переписки с другими учеными около 3000) научных работ Эйлера. При этом его неопубликованные труды издавались Петербургской академией наук в течение 80 лет после его смерти.

Далее стало еще хуже: началась **дифференциация отдельных дисциплин** и даже их **разделов**, т. е. произошла специализация деятельности ученых. Но все-таки и в XX в. отдельные гении еще могли работать в различных областях науки. Например, великий русский физик Лев Ландау (1908–1968) известен своими работами в квантовой механике, физике твердого тела, сверхпроводимости и сверхтекучести, физике элементарных частиц, физике плазмы и др.

Таким образом, разделение познания на отдельные науки области и разделы **явление вынужденное** (все-таки мир един). Вместе с тем наиболее значительные достижения были получены на пересечении и стыке наук: химии и физики; физики и биологии; химии, физики и биологии (всем известная генная инженерия) и т. д. Поэтому реально необходима **интеграция** (объединение) **наук**. Следовательно, чем шире и одновременно глубже ваши познания, тем больших результатов можно достигнуть. К сожалению (или к счастью), это **противоречие** и ведет **к познанию** мира.

Единственную возможность количественного писания в различных науках **дает математика**. Без количественных данных развитие любой науки невозможно. Математика также разделяется на огромное число разделов: алгебру, геометрию, математический анализ, теорию вероятностей, теорию игр, теорию катастроф и т. д. В свою очередь каждая дисциплина также имеет деление. Например, геометрия подразделяется на евклидову геометрию, неевклидовы геометрии, дифференциальную геометрию, интегральную геометрию, геометрию фракталов и т. д. Как правило, каждая дисциплина (а иногда и раздел) изучает свои объекты, имеет свои методы исследования.

Вы начинаете изучать базовую дисциплину математики – **алгебру**, знание которой **необходимо** во всех остальных областях науки. Один из основных объектов алгебры – **числовые и алгебраические выражения**. Алгебра изучает **действия и операции** с такими выражениями.

Пример 1

Числовые выражения:

а) $5^2 - 3$; б) $(2^3 + 4) : 6$;

в) $[3 + 2\cdot(6 - 3)] : 5$; г) 3; д) $-2\dfrac{1}{11}$.

Очень часто числовые выражения возникают при решении задач с **текстовым** содержанием.

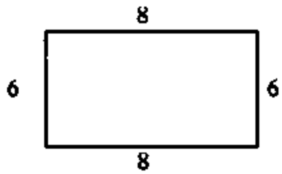
Пример 2

В саду на даче растут 5 яблонь, 4 вишни и 3 сливы. При сборе урожая в среднем было собрано по 30 кг фруктов с яблони, 10 кг – с вишни и 15 кг – со сливы. Какой урожай фруктов был собран в саду?

Так как с каждой яблони было собрано 30 кг, то с 5 яблонь собрали ($30 \cdot 5$) кг фруктов. Так как с каждой вишни собрано 10 кг, то с 4 вишен собрали ($10 \cdot 4$) кг фруктов. Так как с каждой сливы собрано 15 кг, то с 3 слив собрали ($15 \cdot 3$) кг фруктов. Общий урожай фруктов равен сумме урожаев яблок, вишни и сливы, т. е. $30 \cdot 4 + 10 \cdot 4 + 15 \cdot 3$. Решая задачу, получили числовое выражение $30 \cdot 5 + 10 \cdot 4 + 15 \cdot 3$. Забегая вперед (следующий урок), вычислим это выражение: $30 \cdot 5 + 10 \cdot 4 + 15 \cdot 3 = 150 + 40 + 45 = 235$ (кг).

Пример 3

Найдем периметр (сумму длин всех сторон) прямоугольника со сторонами 6 см и 8 см.



а) Можно непосредственно посчитать сумму длин сторон прямоугольника. Тогда получаем числовое выражение $6 + 8 + 6 + 8$ или $8 + 6 + 8 + 6$ (в зависимости от того, с какой стороны подсчитывается периметр).

б) Найдем сумму длин меньших сторон $6 \cdot 2$ и сумму длин больших сторон $8 \cdot 2$. Тогда периметр прямоугольника описывается числовым выражением $6 \cdot 2 + 8 \cdot 2$.

в) Посчитаем полупериметр прямоугольника и найдем сумму длин меньшей и большей стороны $6 + 8$. Учтем, что прямоугольник имеет две меньшие и две большие стороны. Тогда периметр описывается числовым выражением $2(6 + 8)$. Периметр равен 28 см.

Пример 4

Поезд двигался сначала 50 мин со скоростью 60 км/ч, затем остановился на станции на 10 мин, потом двигался еще 1 ч со скоростью 40 км/ч. Найдем среднюю скорость движения поезда.

По определению средняя скорость движения равна отношению пройденного пути к затраченному на этот путь времени. Вычислим путь и время движения. Прежде всего учтем, что 50 мин = $\frac{5}{6}$ ч и 10 мин = $\frac{10}{60} = \frac{1}{6}$ ч (перешли к одинаковым единицам измерения времени). В начале движения был пройден путь $60\cdot\frac{5}{6}$ км, в конце движения – путь $40\cdot 1$ км. Общий пройденный путь описывается числовым выражением $60\cdot\frac{5}{6}+40\cdot 1$ км.

Время, затраченное на этот путь (включая время, затраченное на остановку), описывается числовым выражением $\frac{5}{6}+\frac{1}{6}+1$ (ч). Тогда средняя скорость движения описывается выражением $\dfrac{60\cdot\frac{5}{6}+40\cdot 1}{\frac{5}{6}+\frac{1}{6}+1}$.

Если вычислить это выражение, то получим: $\frac{50+40}{2}=45$ (км/ч).

Число, которое получается в результате выполнения арифметических действий в числовом выражении, называется **значением числового выражения**. Может оказаться, что в числовом выражении какое-то действие **невыполнимо**. Тогда **выражение не имеет смысла**. Пока школьникам известно только одно **невыполнимое действие – деление на нуль** (в дальнейшем появятся и другие действия: извлечение корня четной степени из отрицательных чисел, нахождение логарифма от неположительных чисел и т. д.).

Пример 5

Найдем значение числового выражения $\frac{5^2-3\cdot 6}{7}$.

Выполним действия в данном выражении и получим: $\frac{5^2-3\cdot 6}{7}=\frac{25-18}{7}=\frac{7}{7}=1$. Поэтому значение числового выражения $\frac{5^2-3\cdot 6}{7}$ равно 1.

Пример 6

Числовые выражения $(5^3-1):(15-3\cdot 5)$, $\frac{9^2-3\cdot 5+1}{2^3-9+1}$ не имеют смысла, т. к. делить на нуль нельзя.

Порядок действий в арифметических выражениях

1) Если выражение содержит скобки, то сначала выполняются все действия над числами, заключенными в скобках, а затем – все остальные действия.

2) Сначала выполняют действия третьей ступени (возведение в степень), затем действия второй (умножение и деление) и, наконец,

действия первой ступени (сложение и вычитание). При этом действия одной и той же ступени выполняют в том порядке, в котором они записаны.

3) При вычислении дробного выражения выполняются действия в числителе и в знаменателе дроби и первый результат делится на второй.

Пример 7

Вычислить: $$\frac{\left(0{,}5\overset{1}{:}1{,}25\overset{3}{+}\frac{7}{5}\overset{2}{:}1\frac{4}{7}\overset{4}{-}\frac{3}{11}\right)\overset{5}{\cdot}3}{\left(1{,}5\underset{6}{+}\frac{1}{4}\right)\overset{7}{:}18\frac{1}{3}}.$$

В соответствии с перечисленными правилами порядок действий указан в примере. Выполним эти действия:

(1) $0{,}5:1{,}25=0{,}4=\dfrac{4}{10}=\dfrac{2}{5}$;

(2) $\dfrac{7}{5}:1\dfrac{4}{7}=\dfrac{7}{5}:\dfrac{11}{7}=\dfrac{7}{5}\cdot\dfrac{7}{11}=\dfrac{49}{55}$;

(3) $\dfrac{2}{5}+\dfrac{49}{55}=\dfrac{2\cdot 11+49}{55}=\dfrac{22+49}{55}=\dfrac{71}{55}$;

(4) $\dfrac{71}{55}-\dfrac{3}{11}=\dfrac{71-3\cdot 5}{55}=\dfrac{71-15}{55}=\dfrac{56}{55}$;

(5) $\dfrac{56}{55}\cdot 3=\dfrac{168}{55}$;

(6) $1{,}5+\dfrac{1}{4}=1\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}=1\dfrac{3}{4}=\dfrac{7}{4}$;

(7) $\dfrac{7}{4}:18\dfrac{1}{3}=\dfrac{7}{4}:\dfrac{55}{3}=\dfrac{7}{4}\cdot\dfrac{3}{55}=\dfrac{21}{220}$;

(8) $\dfrac{168}{55}:\dfrac{21}{220}=\dfrac{168}{55}\cdot\dfrac{220}{21}=\dfrac{168\cdot 220}{55\cdot 21}=\dfrac{8\cdot 21\cdot 4\cdot 55}{55\cdot 21}=8\cdot 4=32.$

Итак, результатом выполненных действий является число 32.

III. Задание на уроке

1. Составьте числовые выражения, которые:
   а) имеют смысл;
   б) не имеют смысла.

Если выражение имеет смысл, то найдите его значение. Можно рекомендовать попарную работу (например, соседи по парте): каждый учащийся определяет, имеет ли смысл выражение, записанное соседом, и объясняет почему. При использовании скобок в выражении обратите внимание на то, что количество открывающих и закрывающих скобок должно быть одинаковым.

2. По текстовой задаче предложите учащимся составить числовое выражение (по аналогии с примерами 4–6) и вычислить его значение.

3. Предложите обратную задачу: по написанному простому числовому выражению составить текстовую задачу. Можно рекомендовать попарную работу: соседи пишут выражения и обмениваются тетрадями, после этого составляют задачу по чужому выражению.

IV. Контрольные вопросы

1. Что называется числовым выражением?

2. В каком случае числовое выражение не имеет смысла?

3. Что называется значением числового выражения?

V. Задание на дом

№ 1.1 (в); 1.3 (б); 1.8 (а, г); 1.10 (б, в); 1.14 (а, в); 1.15 (а, г).

VI. Творческие задания (можно использовать на уроке или дома)

1. Используя четыре раза цифру 2, составьте выражение, значение которого равно цифрам: 1, 2, 3, ..., 9 (если это возможно).

Например: $2 : 2 + 2 - 2 = 1$; $2 : 2 + 2 : 2 = 2$; $(2 + 2 + 2) : 2 = 3$; $(2 + 2) + 2 - 2 = 4$; $2 + 2 + 2 : 2 = 5$ и т. д.

2. Установите закономерность и напишите три следующих числа в последовательности чисел:

а) 3; 5; 7; 9; ... (арифметическая прогрессия, каждый член на 2 больше предыдущего);

б) 2; 5; 8; 11; ... (арифметическая прогрессия, каждый член на 3 больше предыдущего);

в) 3; 6; 12; 24; ... (геометрическая прогрессия, каждый член в 2 раза больше предыдущего);

г) 2; 6; 18; 54; ... (геометрическая прогрессия, каждый член в 3 раза больше предыдущего);

д) 1; 4; 9; 16; ... (квадраты натуральных чисел);

е) 1; 8; 27; 64; ... (кубы натуральных чисел);

ж) 1; 2; 3; 5; 8; ... (каждый член равен сумме двух предыдущих);

з) 1; 3; 4; 7; 11; ... (каждый член равен сумме двух предыдущих).

VII. Подведение итогов урока

Урок 2. Алгебраические выражения

Цель: ознакомить с понятиями алгебраического выражения и значения алгебраического выражения.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1. Выполните действия:

а) $(3{,}38 - 2{,}24):1{,}25$;

б) $\left(8\frac{7}{12} - 2\frac{17}{36}\right)\cdot 2{,}7 - 4\frac{1}{3}:0{,}65$.

2. В сплаве цинка и свинца весом 1800 г содержится 20% свинца. Найдите:

а) вес цинка и вес свинца (в граммах);

б) сколько процентов цинка в сплаве;

в) какой процент составляет вес свинца от веса цинка.

Вариант 2

1. Выполните действия:

а) $(6{,}33 - 3{,}21):3{,}75$;

б) $\left(6\frac{8}{15} - 4\frac{21}{45}\right)\cdot 4{,}5 - 2\frac{1}{6}:0{,}52$.

2. В сплаве меди и олова весом 1600 г содержится 40% олова. Найдите:

а) вес меди и вес олова (в граммах);

б) сколько процентов меди в сплаве;

в) какой процент составляет вес олова от веса меди.

III. Изучение нового материала

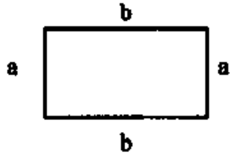
Рассмотрим сначала несколько примеров.

Пример 1

Один холодильник стоит 350 \$. Тогда два холодильника стоят в два раза больше, т. е. $350\cdot 2 = 700$ \$; пять холодильников стоят в пять раз дороже, т. е. $350\cdot 5 = 1750$ \$. Легко сообразить, что a холодильников стоят в a раз больше, т. е. $350\cdot a$ \$. С помощью выражения $350\cdot a$ можно находить стоимость различного числа a холодильников, подставляя разные значения a и выполняя умножение. Так как буква a может принимать различные натуральные значения, то букву a называют **переменной**, а выражение $350\cdot a$ – **алгебраическим выражением** (или выражением с переменной).

Пример 2

Пусть длина одной стороны a см, другой стороны – b см. Найдем периметр прямоугольника.



Так как противоположные стороны прямоугольника равны, то длина двух меньших сторон $2a$ см, длина двух больших сторон $2b$ см. Тогда периметр (сумма длин всех сторон) прямоугольника равна $2a + 2b$ см. Используя это **алгебраическое выражение**, можно находить периметр прямоугольника со сторонами a см и b см. Буквы a и b могут принимать различные положительные значения и называются переменными.

Пример 3

Поезд двигался три часа со скоростью v_1 км/ч и четыре часа со скоростью v_2 км/ч. Найдем среднюю скорость движения поезда.

По определению средняя скорость движения – отношение всего пройденного пути ко времени, затраченному на этот путь. За первые три часа поезд, двигаясь со скоростью v_1 км/ч, проехал расстояние $3v_1$ км. За следующие четыре часа поезд, двигаясь со скоростью v_2 км/ч, прошел расстояние $4v_2$ км. Таким образом, было пройдено расстояние $3v_1 + 4v_1$ км и на это было затрачено $3 + 4 = 7$ ч. Тогда по определению средняя скорость движения поезда $\dfrac{3v_1 + 4v_2}{7}$ км/ч. Опять получили **алгебраическое выражение** $\dfrac{3v_1 + 4v_2}{7}$ с переменными v_1 и v_2.

Таким образом, различные алгебраические, геометрические и физические задачи приводят к появлению **алгебраических выражений**. Возникновение таких выражение **подобно возникновению числовых выражений**. Поэтому многие понятия у **числовых и алгебраических выражений аналогичны.**

Запись, составленная из букв и чисел с помощью арифметических действий и скобок, называется алгебраическим выражением. Буквы, входящие в выражение, называются **переменными.**

Пример 4

а) Запись $2a^2 - 3b^3 + 5$ – алгебраическое выражение с переменными a и b.

б) Запись $\dfrac{(3x-2)y}{x+y}$ – алгебраическое выражение с переменными x и y.

Значение числового выражения, которое получается при подстановке выбранных значений переменных в алгебраическое выражение, называют **значением алгебраического выражения.**

Пример 5

Найдем значение выражения $\frac{2a+3b}{c}$ при $a = 3$, $b = 4$ и $c = 2$.

В данное алгебраическое выражение $\frac{2a+3b}{c}$ подставим данные значения переменных $a = 3$, $b = 4$, $c = 2$. Получаем числовое выражение. Выполнив действия, найдем его значение: $\frac{2\cdot3+3\cdot4}{2}=\frac{6+12}{2}=\frac{18}{2}=9$. Это число является значением алгебраического выражения для данных значений переменных.

III. Задание на уроке

№ 1.18 (а, в); 1.20 (а); 1.22 (а, г); 1.24 (б); 1.29 (а); 1.39 (а, б); 1.42 (а, в).

IV. Контрольные вопросы

1. Чем отличаются числовые и алгебраические выражения?
2. Что называется алгебраическим выражением и переменной?
3. Как вычислить значение алгебраического выражения для данных значений переменных? Всегда ли это можно сделать?

V. Задание на дом

№ 1.18 (б, г); 1.20 (в); 1.22 (б, в); 1.24 (г); 1.30 (в); 1.40 (б, г); 1.42 (б, г).

VI. Творческие задания

1. Одно из положительных чисел увеличили на 10%, другое – на 50%. Может ли сумма этих чисел увеличиться на 30%?

Решение. Пусть первое число x, второе y. Сумма этих чисел $x + y$. После увеличения первое число равно $x+\frac{x}{100}\cdot10=x+0,1x=1,1x$; второе число равно $y+\frac{x}{100}\cdot50=y+0,5y=1,5y$. Тогда сумма этих чисел равна $1,1x+1,5y$. По условию эта величина равна первоначальной сумме, увеличенной на 30%, т. е. $(x+y)+\frac{x+y}{100}\cdot30=$ $=(x+y)+0,3(x+y)=1,3(x+y)=1,3x+1,3y$. Получаем равенство $1,1x+1,5y = 1,3x + 1,3y$, или $1,5y - 1,3y = 1,3x - 1,1x$, или $0,2y = 0,2x$, откуда $y = x$. Таким образом, условия задачи выполнены, если первоначальные числа равны.

2. Докажите на примере трехзначного числа признаки делимости на 2, 3, 4, 5, 9.

Решение. Пусть трехзначное число состоит из a сотен, b десятков и c единиц. Тогда его можно записать в виде $100a + 10b + c$. Теперь рассмотрим делимость этого числа на перечисленные числа 2, 3, 4, 5, 9.

а) Число делится на 2, если его последняя цифра четная или 0. В данном числе $100a + 10b + c$ первые два слагаемых $100a$ и $10b$ при всех a и b делятся на 2. Поэтому, чтобы данное число делилось на 2, надо, чтобы и последнее слагаемое c делилось на 2. Таким образом, последняя цифра данного числа четная или ноль.

б) Число делится на 3 (9), если сумма его цифр делится на 3 (9). В данном числе $100a + 10b + c$ выделим слагаемые, которые делятся на 3 (9), т. е. запишем число в виде $(99a + 9b) + (a + b + c)$. Каждое слагаемое в первой скобке делится на 3 (9). Чтобы данное число делилось на 3 (9), надо чтобы последнее слагаемое $a + b + c$ делилось на 3 (9). Смысл этого слагаемого – сумма цифр данного числа.

в) Число делится на 4, если двузначное число $10b + c$, образованное двумя последними цифрами, делится на 4. В данном числе $100a + 10b + c$ первое слагаемое $100a$ делится на 4. Чтобы число делилось на 4, надо чтобы выражение $10b + c$ делилось на 4. Смысл выражения $10b + c$ – двузначное число, образованное двумя последними цифрами данного числа.

г) Число делится на 5, если его последняя цифра 0 или 5. В данном числе $100a + 10b + c$ первые два слагаемых делятся на 5 при любых a и b. Поэтому необходимо, чтобы и число c делилось на 5. Так как c – последняя цифра числа, то c может принимать значения или 0 или 5.

3. При каком значении цифры x пятизначное число $3x54x$ делится на 2, 3, 4. 5, 9?

4. При каком значении цифр x и y шестизначное число $2x541y$ делится на 12, 15, 18, 20? (Указание: разложить делители на взаимно простые множители: $12 = 3\cdot4$; $15 = 3\cdot5$; $18 = 2\cdot9$; $20 = 4\cdot5$ и использовать соответствующие признаки делимости.)

VII. Подведение итогов урока

Урок 3. Допустимые значения переменных в выражениях

Цель: обсудить допустимые значения переменных в алгебраических выражениях.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Что называется алгебраическим выражением и переменной?

2. Куплено 5 телевизоров стоимостью a рублей, 7 проигрывателей стоимостью b рублей и 8 магнитофонов стоимостью c рублей. Напишите алгебраическое выражение для вычисления стоимости покупки и найдите его значение при $a = 6200$, $b = 3100$ и $c = 5300$.

3. Найдите значение выражения $2x + 3y - z$, если $x + y = 5$ и $y - z = 3$.

Вариант 2

1. Как вычислить значение алгебраического выражения для данных значений переменных?

2. Куплено 8 телевизоров стоимостью a рублей, 5 проигрывателей стоимостью b рублей и 6 магнитофонов стоимостью c рублей. Напишите алгебраическое выражение для вычисления стоимости покупки и найдите его значение при $a = 5800$, $b = 2800$ и $c = 4200$.

3. Найдите значение выражения $3x - 4y - z$, если $x - y = 7$ и $y + z = 5$.

III. Изучение нового материала

С помощью учителя и наводящих вопросов школьники сравнивают выражения из примера 1.

Пример 1

Сравним два алгебраических выражения:

а) $a^2 - ab + b^3$; б) $\dfrac{a^2 - ab + b^3}{a-3}$.

В первом выражении с переменными a и b выполняются операции: возведение в степень, умножение, сложение, вычитание. Все эти действия можно выполнить с любыми числами (или при любых значениях переменных a и b). Поэтому выражение а) **имеет смысл** при любых значениях a и b или **допустимыми значениями** для выражения а) являются любые значения переменных a и b.

В выражении б) помимо упомянутых операций есть еще одно действие – деление на выражение $a - 3$. Такая операция выполнима только, если делитель $a - 3$ не равен нулю (т. к. делить на нуль нельзя), т. е. $a - 3 \neq 0$, откуда $a \neq 3$. Поэтому при любых значениях переменной b и значениях $a \neq 3$ выражение б) **имеет смысл**, а при $a = 3$ – **не имеет смысла**. Следовательно, допустимые значения переменных a и b для выражения б) – любые значения b и a, кроме $a = 3$ (т. е. $a \neq 3$).

Значения переменных, для которых данное выражение имеет смысл (или выполнимы все действия с этими переменными),

называются допустимыми значениями переменных в алгебраическом выражении.

Пример 2

Найдем допустимые значения переменных в алгебраических выражениях:

а) $3x^3-2xy+5y^2$; б) $\dfrac{2x^2-5y}{x-2}$;

в) $\dfrac{2x^2-5y}{x-y}$; г) $\dfrac{3x}{x+1}-\dfrac{y^2}{y-2}$.

а) В выражении с переменными x и y выполняются операции: возведение в степень, умножение, вычитание и сложение. Такие действия выполнимы для любых значений x и y. Поэтому допустимые значения переменных – любые значения x и y.

б) В выражении с переменными x и y выполняются операции: возведение в степень, умножение, вычитание и деление на величину $x-2$. Это действие возможно, если делитель $x-2\neq 0$, т. е. $x\neq 2$. Поэтому допустимые значения переменных – любые значения y и любые $x\neq 2$.

в) В выражении помимо других операций есть и деление на величину $x-y$. Такое действие возможно, если делитель $x-y\neq 0$, т. е. $x\neq y$. Поэтому допустимые значения переменных – любые значения x и y, такие что $x\neq y$ (например, $x=5$ и $y=3$ – допустимые значения переменных; $x=5$ и $y=5$ – недопустимые значения).

г) В выражение входит деление на величины $x+1$ и $y-2$. Такие операции возможны, если делители $x+1\neq 0$ и $y-2\neq 0$, откуда $x\neq -1$ и $y\neq 2$. Поэтому допустимые значения переменных – любые значения $x\neq -1$ и любые значения $y\neq 2$.

Равенство, обе части которого являются алгебраическими выражениями, называется формулой.

Пример 3

а) $P=2(a+b)$ – формула периметра прямоугольника (где P – периметр, a и b – длины сторон прямоугольника).

б) $S=ab$ – формула площади прямоугольника (где S – площадь).

в) $m=3n$ – формула числа, кратного 3 (где m – число, кратное 3, n – любое целое число).

г) $s=vt$ – формула пройденного пути при равномерном движении (где s – пройденный путь, v – скорость движения, t – время движения).

д) $v=\dfrac{s}{t}$ – формула средней скорости (где v – средняя скорость, s – пройденный путь, t – время, затраченное на этот путь).

Остановимся на делении натуральных чисел более подробно, т. к. с этим понятием связано много задач.

Пример 4

а) Число 28 без остатка делится на 7, и в частном получается число 4. Тогда число 28 можно представить в виде: $28 = 7 \cdot 4$, т. е.

делимое = делитель · частное.

б) Число 36 без остатка делится на 3, и в частном получается число 12. Тогда число 36 можно представить в том же виде: $36 = 3 \cdot 12$, т. е.

делимое = делитель · частное.

Обобщим результаты этого примера. Если **число m** без остатка **делится на число p и в частном** получается **число n**, то его можно представить **в виде: $m = p \cdot n$**, т. е.

делимое = делитель · частное.

Пример 5

а) Запишем формулу числа, кратное 5: $m = 5 \cdot n$, т. к. 5 – делитель, n – некоторое частное (n – целое число).

б) Формула числа, кратного 13: $m = 13 \cdot n$, т. к. 13 – делитель, n – некоторое частное (n – целое число).

Если в эти формулы подставлять различные натуральные числа n, то будем получать числа m, кратные 5 или 13.

Пример 6

Докажем, что сумма и разность двух чисел, кратных 7, также кратна 7.

Первое число m_1, кратное 7, запишем в виде $m_1 = 7n_1$ (где n_1 – некоторое частное), второе число m_2, кратное 7, запишем в виде $m_2 = 7n_2$ (где n_2 – частное). Найдем сумму чисел m_1 и m_2 и получим: $m_1 + m_2 = 7n_1 + 7n_2$. Это выражение можно записать в виде $m_1 + m_2 = 7(n_1 + n_2)$. Такая запись означает, что число $m_1 + m_2$ делится на 7 и в частном получается число $n_1 + n_2$, т. е. сумма чисел m_1 и m_2 кратна 7.

Аналогично найдем разность чисел m_1 и m_2 и получим: $m_1 - m_2 = 7n_1 - 7n_2$. Это выражение запишем в виде $m_1 - m_2 = 7(n_1 - n_2)$. Такая запись означает, что число $m_1 - m_2$ делится на 7 и в частном получается число $n_1 - n_2$, т. е. разность чисел $m_1 - m_2$ кратна 7.

Обсудим теперь деление натуральных чисел с остатком.

Пример 7

а) Число 28 делится на число 9 с остатком. При этом в частном получается 3 и в остатке 1. Тогда число 28 можно представить в виде $28 = 9 \cdot 3 + 1$, т. е.

делимое = делитель · частное + остаток

(при этом остаток меньше делителя).

б) Число 46 делится на число 8 с остатком. При этом в частном получается 5 и в остатке 6. Тогда число 46 можно записать в виде $46 = 8 \cdot 5 + 6$, т. е.

делимое = делитель · частное + остаток
(при этом остаток меньше делителя).

Обобщим результаты этого примера. Если **число m делится на число p** и в частном получается **число n, в остатке – число r**, то его можно представить в виде $m = p \cdot n + r$ (где $r < p$), т. е.

делимое = делитель · частное + остаток
(при этом остаток меньше делителя).

Пример 8

а) Запишем формулу нечетного числа: $m = 2 \cdot n + 1$ (где n – некоторое частное), т. к. нечетное число при делении на 2 дает остаток 1.

б) Формула числа, которое при делении на 7 дает остаток 3: $m = 7n + 3$ (где n – некоторое частное).

Пример 9

При делении на 8 два числа дают остаток 5. Найти остаток при делении на 8 суммы и разности этих чисел.

Данные числа m_1 и m_2 можно записать в виде $m_1 = 8n_1 + 5$ и $m_2 = 8n_2 + 5$ (где n_1 и n_2 - некоторые частные). Найдем сумму этих чисел: $m_1 + m_2 = 8n_1 + 5 + 8n_2 + 5 = 8n_1 + 8n_2 + 10$. Так как рассматривается деление на 8, то число 10 представим в виде суммы двух чисел, одно из которых кратно 8, т. е. $10 = 8 + 2$. Тогда число $m_1 + m_2$ запишем в виде $m_1 + m_2 = 8n_1 + 8n_2 + 8 + 2 = 8(n_1 + n_2 + 1) + 2$. Эта запись означает, что при делении на 8 числа $m_1 + m_2$ в частном получается число $n_1 + n_2 + 1$, а в остатке – число 2.

Найдем разность данных чисел: $m_1 - m_2 = 8n_1 + 5 - 8n_2 - 5 = 8n_1 - 8n_2$. Представим разность в виде $m_1 - m_2 = (n_1 - n_2)$. Эта запись означает, что число $m_1 - m_2$ кратно 8 (при этом в частном получается $n_1 - n_2$), т. е. остаток равен 0.

IV. Задание на уроке

№ 1.35; 1.37; 1.43 (а); 1.44 (б).

1. Напишите формулу числа, которое при делении на 5 дает остаток: а) 0; б) 2; в) 3.

По этой формуле найдите: а) однозначное число; б) двузначное число; в) трехзначное число.

2. Напишите формулу числа, которое при делении на 11 дает остаток: а) 3; б) 7; в) 10.

По этой формуле найдите три двузначных числа.

3. Докажите, что сумма и разность двух нечетных чисел является числом четным.

V. Контрольные вопросы

1. Какие значения переменных в алгебраическом выражении называются допустимыми?

2. Найдите допустимые значения выражений:

а) $3\cdot a^2+2\cdot a\cdot b-b$; в) $2\cdot a+\frac{b+1}{a-1}+\frac{b-3}{a+2}$;

б) $2\cdot a+\frac{3\cdot b}{a-2}$; г) $2\cdot a+3\cdot b^2+\frac{a}{a-2\cdot b}$.

3. Какое равенство называется формулой? Приведите примеры.

4. Напишите формулу числа, кратного числу p.

5. Напишите формулу числа, которое при делении на число p дает остаток r.

VI. Задание на дом

№ 1.36; 1.43 (б); 1.44 (а).

1. Найдите допустимые значения выражений:

а) $2\cdot a-3\cdot a\cdot b+3\cdot b^2$; в) $6\cdot a+\frac{3\cdot a}{a+1}-\frac{2\cdot a+1}{a-3}+a^2$;

б) $3\cdot a^2+\frac{2\cdot a+1}{a-5}$; г) $2\cdot a^2+3\cdot a\cdot b-\frac{a+b}{a-b}$.

2. Напишите формулу числа, кратного 17. По этой формуле найдите:

а) двузначное число;

б) трехзначное число.

3. Напишите формулу числа, которое при делении на 7 дает остаток: а) 0; б) 2; в) 5.

По этой формуле найдите:

а) однозначное число;

б) двузначное число;

в) трехзначное число.

VII. Творческие задания

1. На примере двух чисел, кратных числу n, докажите, что их сумма, разность и произведение также кратны числу n.

Пусть числа m_1 и m_2 кратны числу n. Тогда их можно записать в виде $m_1 = n\cdot a_1$ и $m_2 = n\cdot a_2$ (где a_1 и a_2 – некоторые частные). Рассмотрим сумму чисел m_1 и m_2 и получим: $m_1 + m_2 = n\cdot a_1 + n\cdot a_2 = n\cdot(a_1 + a_2)$. Эта запись означает, что число $m_1 + m_2$ делится на n (при этом в частном получается число $a_1 + a_2$), т. е. сумма данных чисел m_1 и m_2 кратна n. Найдем разность чисел: $m_1 - m_2 = n\cdot a_1 - n\cdot a_2 = n\cdot(a_1 - a_2)$. Из этой записи следует, что разность данных чисел кратна n (при этом в частном получается $a_1 - a_2$). Рассмотрим произведение данных чисел m_1 и m_2 и получим: $m_1\cdot m_2 = n\cdot a_1\cdot n\cdot a_2 = n\cdot a_1\cdot n\cdot a_2$. Эта запись означает, что число $m_1\cdot m_2$

делится на n (при этом в частном получается число $a_1 \cdot n \cdot a_2$), т. е. произведение данных чисел m_1 и m_2 кратно n. Вообще говоря, из приведенной записи следует, что произведение данных чисел m_1 и m_2 кратно даже n^2.

2. Два числа при делении на число n дают одинаковый остаток. Докажите, что разность данных чисел кратна числу n.

Даны числа m_1 и m_2, которые при делении на число n дают одинаковый остаток r. Тогда их можно записать в виде $m_1 = n \cdot a_1 + r$ и $m_2 = n \cdot a_2 + r$ (где a_1 и a_2 – некоторые частные). Найдем разность данных чисел: $m_1 - m_2 = n \cdot a_1 + r - (n \cdot a_2 + r) = n \cdot a_1 + r - n \cdot a_2 - r = n \cdot a_1 - n \cdot a_2 = n \cdot (a_1 - a_2)$. Эта запись означает, что число $n \cdot (a_1 - a_2)$ кратно n (при этом при делении получается частное $a_1 - a_2$). Следовательно, разность данных чисел кратна n.

VIII. Подведение итогов урока

§ 2. Что такое математический язык

Урок 4. Язык математики

Цель: дать представление о математическом языке и терминологии.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (тест).

Вариант 1

1. Укажите допустимые значения переменных для выражения $\dfrac{2x - 7y + 2}{(x + 3)(y - 2)}$.

Варианты ответов: а) $x \neq 3$ $y \neq 2$; б) $x \neq -3$ $y \neq 2$; в) $x \neq -3$ $y \neq -2$.

2. Напишите формулу числа, которое при делении на 6 дает остаток 4.

Варианты ответов: а) $6n - 4$; б) $4n + 6$; в) $6n + 4$.

3. Число a при делении на 7 дает остаток 4. Найдите остаток от деления числа $5a$ на 7.

Варианты ответов: а) 4; б) 3; в) 6.

Вариант 2

1. Укажите допустимые значения переменных для выражения $\frac{3x-4y-1}{(x-5)(y+3)}$.

Варианты ответов: а) $x \neq 5$ $y \neq -3$; б) $x \neq 5$ $y \neq 3$; в) $x \neq -5$ $y \neq -3$.

2. Напишите формулу числа, которое при делении на 8 дает остаток 5.

Варианты ответов: а) $8n - 5$; б) $5n + 8$; в) $8n + 5$.

3. Число a при делении на 9 дает остаток 3. Найдите остаток от деления числа $4a$ на 9.

Варианты ответов: а) 5; б) 3; в) 6.

III. Изучение нового материала

В отличие от обычного разговорного языка **язык математики** намного **яснее, четче и емче.**

Пример 1

Утверждение «от перемены мест сомножителей произведение не меняется» на математическом языке записывается в виде равенства $ab = ba$.

Пример 2

Равенство $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ переводится на обычный язык как квадрат суммы двух чисел равен сумме квадрата первого числа, удвоенного произведения данных чисел и квадрата второго числа.

Разумеется, без существования математического языка никаких расчетов провести невозможно (обычный разговорный язык не помогает). Можно провести эксперимент: описать любой пример обычными словами, не пользуясь математическими символами, а также привести его решение. Сразу станет понятно, что такая математика не сможет существовать.

Математический язык возник не сразу, а создавался столетиями и тысячелетиями. Например, вспомним историю появления и совершенствования символа квадратный корень ($\sqrt{\ }$). Начиная с XIII в. итальянские математики обозначали корень латинским словом Radix (корень) или сокращенно R. Так писали R^215 вместо $\sqrt{15}$. В XV в. квадратный корень обозначали точкой впереди числа. В скорописи точку заменяли черточкой, которая позже перешла в символ v. Вероятно, из этих обозначений образовался знак V, близкий к современному. В XVII в. в Голландии использовалось обозначение $\overset{:}{V}15$.

Лишь в 1637 г. Рене Декарт ввел современное обозначение корня. Окончательно привычный нам знак корня вошел во всеобщее употребление только в начале XVIII в.

В любом языке существует письменная и устная речь. Ранее мы говорили о **письменной речи**, к которой относятся **числа, знаки, переменные, символы** и т. д. **Устная речь** математического языка – специальные термины (множитель, неравенство, координата, график и т. д.) и различные **математические утверждения**, выраженные словами.

Разумеется, как и любой другой язык, математический язык необходимо изучать. Это и будет происходить в ходе познания алгебры.

IV. Задание на уроке

№ 2.1 (б, г); 2.4 (в); 2.6 (а); 2.8 (а, г); 2.11 (в); 2.12 (б); 2.14 (б, в); 2.16 (б); 2.20 (в, г); 2.23 (г).

V. Задание на дом

№ 2.1 (а, в); 2.4 (г); 2.6 (в); 2.8 (б, в); 2.11 (г); 2.12 (а); 2.14 (б, в); 2.16 (б); 2.20 (в, г); 2.23 (б).

VI. Подведение итогов урока

§ 3. Что такое математическая модель

Урок 5. Математическая модель задачи

Цель: рассмотреть понятия математического моделирования и его этапов.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Изучение нового материала

Для описания и анализа условий (ситуации) задачи используют ее **математическую модель**. Более того, грамотно построенная модель позволяет увидеть **неожиданные стороны, особенности** задачи и получить **поразительные результаты**. Например, создав релятивистскую квантовую теорию движения частицы (фактически создав математическую модель этого явления), английский физик Поль Дирак в 1931 г. предсказал существование античастиц (т. е. частиц, имеющих противоположный по знаку электрический заряд). Вскоре была экспериментально открыта первая античастица (по отношению к электрону) – позитрон. Сам же П. Дирак в 1933 г. был удостоен Нобелевской премии.

Мы, разумеется, рассмотрим понятие **математической модели** на более простом примере.

Пример 1

Пусть в пятом классе учится 14 девочек и 12 мальчиков, в шестом классе – 12 девочек и 12 мальчиков, в седьмом классе – 11 девочек и 16 мальчиков. Найдем количество школьников в каждом классе. Для этого надо три раза выполнить одну и ту же операцию сложения:

в пятом классе: 14 + 12 = 26 учеников.

в шестом классе: 12 + 12 = 24 ученика.

в седьмом классе: 11 + 16 = 27 учеников.

С помощью математического языка можно дать **математическую модель** этих ситуаций. Пусть в данном классе учится a девочек и b мальчиков, тогда в классе будет всего $a + b$ учеников. Мы получили **математическую модель** данной **реальной ситуации**.

В зависимости от **постановки вопроса** в задаче меняется и **математическая модель** ситуации (см. таблицу).

№	Реальная ситуация	Математическая модель
1	В 5 классе девочек на 2 больше, чем мальчиков	$a = b + 2$, или $a - b = 2$, или $a - 2 = b$
2	В 5 классе шестикратное количество девочек равно семикратному количеству мальчиков	$6a = 7b$, или $a = \frac{7}{6}b$, или $b = \frac{6}{7}a$
3	В 6 классе девочек и мальчиков поровну	$a = b$
4	В 7 классе девочек на 5 меньше, чем мальчиков	$a = b - 5$, или $a + 5 = b$, или $b - a = 5$
5	Если в 7 класс придут 4 девочки и уйдет 1 мальчик, то детей будет поровну	$a + 4 = b - 1$
...	...	...

1. Как видно из таблицы, **одной и той же ситуации** может соответствовать **различная математическая модель**. Например, $a = b + 2$ и $6a = 7b$ (см. п. 1 и п. 2).

2. **Одна и та же математическая модель** (см. п. 1) может быть записана в **различных** равносильных **формах**: $a = b + 2$, или $a - b = 2$, или $a - 2 = b$, которые с помощью простейших и очевидных преобразований **переходят друг в друга**.

3. Чем больше информации о реальной ситуации (больше математических моделей), тем точнее ее можно охарактеризовать. Например, из модели $a = b + 2$ можно сделать вывод только о том, что девочек на 2 больше, чем мальчиков. Такому условию удовлетворяют сочетания $a = 18$ и $b = 16$, $a = 21$ и $b = 19$ и т. д. Если рассматривать две разные модели одной и той же ситуации (п. 1 и п. 2) $a = b + 2$ и $6a = 7b$, то можно найти число девочек и мальчиков в классе: $a = 14$ и $b = 12$. Только эти числа удовлетворяют двум приведенным моделям.

4. Надо уметь переходить от реальной ситуации к ее математической модели (см. таблицу). Но требуется решать и обратную задачу: придавать реальный смысл математической модели. Например для пятого класса модель $a + 1 = b + 3$ означает, что если в класс придут 1 девочка и 3 мальчика, то девочек и мальчиков станет поровну.

Помимо краткого и наглядного описания реальной ситуации математическая модель позволяет ее анализировать, в частности решать те или иные задачи.

Пример 2

В классе девочек вдвое больше, чем мальчиков. Если из класса уйдут 4 девочки и придет 5 мальчиков, то девочек и мальчиков станет поровну. Сколько девочек и мальчиков в классе?

Пусть в классе x мальчиков, тогда девочек $2x$. Если уйдут 4 девочки, то их станет $2x - 4$. Когда придет 5 мальчиков, то их станет $x + 5$. Приравняем число девочек и мальчиков после их перехода. Получаем уравнение $2x - 4 = x + 5$. Такое уравнение – математическая модель задачи. Используя правила решения уравнений, получим $2x - x = 4 + 5$, или $x = 9$. Таким образом, в классе 9 мальчиков и 18 девочек.

При решении задачи были четко выполнены **три этапа**:

1) **введена переменная** x, на математическом языке **записано условие задачи и получена** ее математическая **модель** в виде уравнения $2x - 4 = x + 5$ (**получение математической модели**);

2) формально **решено** полученное **уравнение** с использованием знания курса математики 5–6 классов без учета реального смысла задачи (**работа с математической моделью**);

3) найденное решение использовано для ответа на вопрос задачи применительно к реальной ситуации (ответ на вопрос задачи).

Заметим, что грамотно составленная модель задачи может свидетельствовать о невозможности такой ситуации.

Пример 3

В классе девочек на 4 больше, чем мальчиков. Если из класса уйдут 6 девочек и 3 мальчика, то девочек и мальчиков станет поровну. Сколько девочек и мальчиков в классе?

Пусть в классе x мальчиков, тогда девочек $x + 4$. После ухода детей мальчиков станет $x - 3$ и девочек $x + 4 - 6$. Приравняем число мальчиков и девочек после ухода детей. Получаем уравнение $x - 3 = x + 4 - 6$ – математическая модель задачи. Решая уравнение, имеем: $x - x = 3 + 4 - 6$, или $0 = 1$. Так как получили неверное равенство, то задача не имеет решения, т. е. данная ситуация реально не существует.

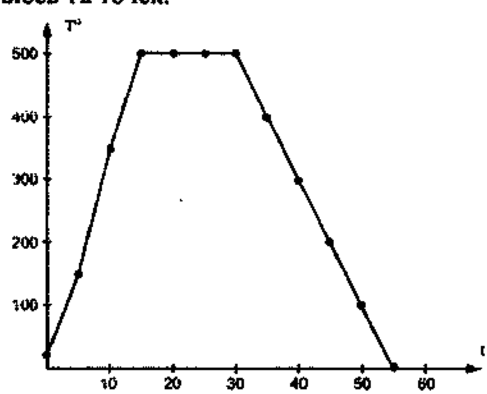
Разумеется, математическая модель может быть не только алгебраической, но и графической.

Пример 4

Построим график температуры стали при ее закалке, если температуру измеряли в течение часа и составили следующую таблицу.

Время, мин	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55
Температура, °С	20	150	350	500	500	500	500	400	300	200	100	0

Построим прямоугольную систему координат. По горизонтальной оси (оси абсцисс) откладываем значения времени, по вертикальной оси (оси ординат) – значения температуры. Отметим на координатной плоскости точки, координатами которых являются числа из таблицы. Получилось 12 точек.



Из графика видно, что в течение 15 мин сталь нагревается от 20 до 500 °С. В течение следующих 15 мин температура стали постоянна и равна 500 °С. Затем в течение 25 мин сталь охлаждается до 0 °С.

Рассмотренная математическая модель является примером **графической модели задачи.**

Таким образом, математические **модели** крайне **необходимы и полезны** при анализе реальной действительности. Чем **сложнее ситуация,** тем **более сложной** становится математическая **модель** задачи. Поэтому в процессе изучения алгебры будут рассматриваться **более сложные** математические **модели** и **правила работы** с ними.

III. Задание на уроке

№ 3.1 (б, г); 3.4 (б); 3.5; 3.10; 3.18; 3.24; 3.30 (а, б); 3.34; 3.37; 3.41; 3.46; 3.47 (а, в).

IV. Контрольные вопросы

1. На примере расскажите об алгебраической математической модели.
2. Расскажите о геометрической математической модели.

V. Задание на дом

№ 3.2 (а, в); 3.6; 3.9; 3.13; 3.17; 3.20; 3.29 (б, в); 3.32; 3.36; 3.42; 3.45; 3.47 (б, г).

VI. Подведение итогов урока

§ 4. Линейное уравнение с одной переменной

Урок 6. Уравнение и его корни

Цель: дать понятие об уравнении и его корнях.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Изучение нового материала

Пример 1

Квадрат некоторого числа больше самого числа на 6. Найти данное число.

Пусть неизвестное число равно x, тогда его квадрат равен x^2. Число x, увеличенное на 6, равно $x + 6$. По условию задачи числа x^2 и $x + 6$ равны. Получаем равенство $x^2 = x + 6$, содержащее переменную x. Это равенство будет верным не при всех значениях x, а только при тех значениях x, которые являются ответом задачи. Такое равенство называют **уравнением с одной переменной** (или **с одной неизвестной**) x. Для решения задачи надо найти такие числа x, которые обращают равенство $x^2 = x + 6$ в верное. Эти числа x называют **решениями уравнения** или **корнями уравнения**. Уравнение $x^2 = x + 6$ имеет два корня: $x_1 = 3$ и $x_2 = -2$. Действительно, при подстановке значения $x = 3$ в уравнение получаем верное числовое равенство $3^2 = 3 + 6$. При подстановке числа $x = -2$ в уравнение также получаем верное равенство $(-2)^2 = -2 + 6$.

Пример 2

Со склада вывозят груз одинаковыми машинами. Если загрузить 16 машин, то на складе останется 8 т груза. Если нагрузить 14 машин, то на складе останется 32 т груза. Найти грузоподъемность одной машины и вес груза на складе. Пусть x т – грузоподъемность одной машины. Тогда на 16 машин загружают $16x$ т груза. Если к этой величине $16x$ добавим 8 т, оставшихся на складе, то получим вес груза, находящегося на складе, т. е. $16x + 8$. Теперь опишем второе условие задачи. На 14 машин загружают $14x$ т груза. Если к этой величине $14x$ добавить 32 т, оставшихся на складе, то получим вес груза, хранящегося на складе, т. е. $14x + 32$. Приравняем выражения для веса груза на складе, которые получаются из первого и второго условий задачи. Получаем равенство $16x + 8 = 14x + 32$. Это равенство называется уравнением с одной неизвестной x. Уравнение $16x + 8 = 14x + 32$ имеет один корень $x = 12$, т. к. при подстановке этого значения в уравнение получаем верное числовое равенство $16 \cdot 12 + 8 = 14 \cdot 12 + 32$.

Учитывая примеры, сформулируем основные понятия.

Равенство между двумя алгебраическими выражениями с одной переменной называют уравнением с одной неизвестной.

Корнем уравнения называют значение переменной, при котором уравнение обращается в верное числовое равенство.

В рассмотренных примерах уравнения имели конечное число корней (два или один). Уравнения также могут иметь бесконечное множество корней или вовсе не иметь корней.

Пример 3

Уравнение $7(x + 3) = 7x + 21$, используя распределительное свойство, можно записать в виде $7x + 7 \cdot 3 = 7x + 21$ или $7x + 21 = 7x + 21$. Видно, что при любом значении x левая часть уравнения равна правой (т. е. по сути уравнение является тождеством). Поэтому любое число x будет корнем данного уравнения (таких корней бесконечно много).

Пример 4

Уравнение $x^2 + 1 = -|x|$ корней не имеет, т. к. при любых значениях x его левая часть $x^2 + 1$ положительна (т. е. $x^2 + 1 > 0$), а правая часть – неположительна (т. е. $-|x| \le 0$).

Заметим, что одна из частей уравнения может и не содержать переменной.

Пример 5

Равенства: а) $2x + 7 = 3$; б) $5x - 3 = 0$; в) $3x^2 - 10x = 5$; г) $2x^2 - 3x + 6 = 0$; д) $4 = -x^2 + 3x$ также являются уравнениями (а, б – линейные, в–д – квадратные).

Решить уравнение означает найти все его корни или доказать, что корней нет.

Уравнения, которые имеют одни и те же корни, называют равносильными. Уравнения, которые не имеют корней, также считают равносильными.

Пример 6

а) Уравнения $x^2 - 5x + 6 = 0$ и $(x - 2)(x - 3) = 0$ являются равносильными, т. к. каждое из этих уравнений имеет одни и те же корни $x_1 = 2$ и $x_2 = 3$ (проверьте сами).

б) Уравнения $x^2 + 5 = -3$ и $|x| + 1 = -2$ также являются равносильными, т. к. каждое из этих уравнений корней не имеет (в них левая часть при любых значениях x величина положительная, а правая часть – отрицательное число).

в) Уравнения $x^2 - 5x + 6 = 0$ и $x + 4 = 6$ не являются равносильными, т. к. первое уравнение имеет два корня: $x_1 = 2$ и $x_2 = 3$, второе уравнение – только один корень $x = 2$. Несмотря на то что уравнения имеют один общий корень $x = 2$, они считаются неравносильными.

Решение уравнения состоит в его постепенной замене более **простыми равносильными уравнениями**. При решении уравнений используются **свойства**:

1) Если в уравнении **перенести слагаемое** из одной части в другую, **изменив его знак**, то получится равносильное уравнение.

Пример 7

Уравнения $6x = 3x + 7$ и $6x - 3x = 7$ равносильны (перенесли слагаемое $3x$ в левую часть уравнения).

2) Если **обе части** уравнения **умножить или разделить на число** (не равное нулю), то получится равносильное уравнение.

Пример 8

Уравнения $6x = 3x + 7$ и $2x = x + \frac{7}{3}$ равносильны (обе части уравнения разделили на число 3).

Эти свойства уравнений основаны на свойствах числовых равенств: если к обеим частям верного равенства прибавить одно и то же число или обе части верного равенства умножить или разделить на одно и то же не равное нулю число, то получится верное равенство.

III. Задание на уроке

№ 4.1 (б, в); 4.2 (а, г); 4.3 (а, в); 4.4 (а, г).

1. Составьте уравнение, которое имеет корни: а) 4; б) 4 и 2; в) 4; 2 и –3.

2. Равносильны ли уравнения? Объясните почему.

а) $2(x-3)=4$ и $2x=10$;

б) $x-3=0$ и $(x-3)(x+2)=0$;

в) $x-3=0$ и $x^2+1=0$;

г) $2x^2+3=0$ и $|x|+7=0$.

IV. Контрольные вопросы

1. Что называется уравнением? Приведите примеры уравнений.

2. Что называется корнем уравнения? Сколько корней имеет уравнение? Приведите примеры.

3. Какие уравнения называются равносильными?

4. Сформулируйте основные свойства уравнений.

V. Задание на дом

№ 4.1 (а, г); 4.2 (б, в); 4.3 (б, г); 4.4 (б, в); 4.5 (а, в).

1. Приведите примеры:

а) равносильных уравнений;

б) неравносильных уравнений.

2. Докажите, что уравнение не имеет корней:

а) $3x^2+5=0$;

б) $2x^2+|x|=-3$;

в) $(x-3)^2=-1$;

г) $2x^2+(x-1)^2+5=0$.

VI. Подведение итогов урока

Урок 7. Линейное уравнение с одной переменной

Цель: дать понятие о линейном уравнении и его решении.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Изучение нового материала

Уравнение вида $ax+b=0$ **(где** x **–** переменная, a и b – некоторые числа) **называется линейным уравнением с одной переменной.**

Отличительная особенность такого уравнения – **переменная x входит в уравнение обязательно в первой степени.**

Пример 1

Перечисленные уравнения являются линейными, т. к. имеют вид $ax + b = 0$:

а) $3x + 7 = 0$ (где $a = 3$, $b = 7$);

б) $-2x + 5 = 0$ (где $a = -2$, $b = 5$);

в) $0 \cdot x - 5 = 0$ (где $a = 0$, $b = -5$);

г) $0 \cdot x = 0$ (где $a = 0$, $b = 0$).

Все линейные уравнения приводятся **к стандартному виду** $ax + b = 0$ с помощью тождественных преобразований.

Пример 2

В уравнении $2(3x - 5) = x - 3$ переменная x входит в первой степени. Поэтому уравнение является линейным. Приведем это уравнение к стандартному виду. В левой части раскроем скобки: $2 \cdot 3x - 2 \cdot 5 = x - 3$ или $6x - 10 = x - 3$. Перенесем слагаемые в левую часть уравнения. Приведем подобные члены. Получаем: $6x - x - 10 + 3 = 0$ или $5x - 7 = 0$. Линейное уравнение имеет стандартный вид $ax + b = 0$ (где $a = 5$, $b = -7$).

Пример 3

Перечисленные уравнения не являются линейными:

а) $3x^2 + 6x + 7 = 0$, т. к. содержит переменную x во второй степени (слагаемое $3x^2$);

б) $6x + 2|x| = 3$, т.к. содержит величину $|x|$;

в) $2x^3 + 5x = 4$, т.к. содержит переменную x в третьей степени.

При решении линейного уравнения $ax + b = 0$ возможны **три** следующих **случая**:

1) если число $a \neq 0$, то уравнение имеет **один корень** $x = -\dfrac{b}{a}$;

2) если числа $a = 0$ и $b = 0$, то уравнение имеет **бесконечно много корней** (любое число является корнем уравнения);

3) если числа $a = 0$ и $b \neq 0$, то уравнение **корней не имеет.**

Пример 4

Решим уравнение $2(3x - 1) = 4(x + 3)$. Приведем это уравнение к стандартному виду. Раскроем скобки в обеих частях уравнения: $2 \cdot 3x - 2 \cdot 1 = 4 \cdot x + 4 \cdot 3$ или $6x - 2 = 4x + 12$. Слагаемые, зависящие от x, перенесем в левую часть уравнения; числа – в правую, изменяя их знаки на противоположные: $6x - 4x = 2 + 12$. Приведем подобные слагаемые: $2x = 14$. В этом уравнении $a = 2$ (очевидно $a \neq 0$) и $b = -14$.

Уравнение имеет один корень: $x = -\dfrac{b}{a} = \dfrac{14}{2} = 7$.

Пример 5

Решим уравнение $2(3x-1)=4(x+3)-14+2x$. Приведем это уравнение к стандартному виду: $6x - 2 = 4x + 12 - 14 + 2x$, или $6x - 4x - 2x = 2 + 12 - 14$, или $0 \cdot x = 0$ (где $a = 0$, $b = 0$). Очевидно, что при подстановке любого значения x получаем верное числовое равенство $0 = 0$. Поэтому любое число является корнем этого уравнения (уравнение имеет бесконечно много корней).

Пример 6

Решим уравнение $2(3x-1)=4(x+3)+2x$. Приведем это уравнение к стандартному виду: $6x-2=4x+12+2x$, или $6x-4x-2x=12+2$, или $0 \cdot x - 14 = 0$ (где $a = 0$, $b = -14$). Очевидно, что при подстановке любого значения x получаем неверное числовое равенство $-14 = 0$. Поэтому уравнение корней не имеет.

III. Задание на уроке

№ 4.6 (а, г); 4.7 (б, в); 4.8 (в, г); 4.9 (а, б); 4.10 (б, в); 4.13; 4.16; 4.18; 4.22; 4.25.

IV. Контрольные вопросы

1. Напишите стандартный вид линейного уравнения.
2. Какое уравнение является линейным?
3. Назовите возможные случаи при решении линейных уравнений.

V. Задание на дом

№ 4.6 (б, в); 4.7 (а, г); 4.8 (а, б); 4.9 (в, г); 4.23.

VI. Подведение итогов урока

Урок 8. Решение задач с помощью уравнений

Цель: дать представление о текстовых задачах и их решении с помощью уравнений.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Изучение нового материала

Для решения текстовых задач используют следующую схему:

а) обозначают неизвестную в задаче величину буквой;

б) используя эту букву, записывают другие величины в задаче;

в) составляют уравнение по условию задачи;

г) решают полученное уравнение;

д) находят требуемые по условию задачи величины.

Пример 1

Три бригады рабочих изготавливают игрушки к Новому году. Первая бригада сделала шары. Вторая бригада изготавливает сосульки и сделала их на 12 штук больше, чем шаров. Третья бригада изготавливает снежинки и сделала их на 5 штук меньше, чем изготовлено шаров и сосулек вместе. Всего было сделано 379 игрушек. Сколько в отдельности изготовлено шаров, сосулек и снежинок?

Обозначим количество шаров буквой x. Тогда число сосулек по условию равно $x + 12$. Шаров и сосулек вместе было изготовлено $x + (x + 12) = x + x + 12 = 2x + 12$. Тогда снежинок было сделано на 5 штук меньше, т. е. $2x + 12 - 5 = 2x + 7$. Всего было изготовлено $x + (x + 12) + (2x - 7)$ игрушек. По условию было сделано 379 игрушек. Поэтому получаем уравнение $x + (x + 12) + (2x + 7) = 379$.

Это уравнение является линейным. Раскроем скобки и приведем подобные члены: $x + x + 12 + 2x + 7 = 379$ или $4x + 19 = 379$. Перенесем число 19 в правую часть и приведем уравнение к стандартному виду: $4x = 379 - 19$ или $4x = 360$. Разделим обе части уравнения на число 4 и найдем $x = 90$. Итак, было изготовлено 90 шаров. Тогда сосулек было сделано $x + 12 = 90 + 12 = 102$ штуки и снежинок $2x + 7 = 2 \cdot 90 + 7 = 187$ штук.

Пример 2

Надо расставить 380 книг на 3 полки так, чтобы на второй полке было на 6 книг больше, чем на первой, а на третьей полке – на 9 книг больше, чем на второй. Как это можно сделать?

Пусть на первую полку поставили x книг, тогда на вторую полку – $(x + 6)$ книг и на третью полку – $(x + 6) + 9 = (x + 15)$ книг. Всего на трех полках будет стоять $x + (x + 6) + (x + 15)$ книг. По условию задачи книг должно быть 380. Получаем уравнение $x + (x + 6) + (x + 15) = 380$. После приведения подобных членов имеем $3x + 21 = 380$. Запишем это уравнение в стандартном виде: $3x = 380 - 21$ или $3x = 359$, откуда $x = 119\frac{2}{3}$. Очевидно, что число книг на полке не может быть дробным, поэтому описанная в задаче расстановка книг на полке невозможна.

III. Задание на уроке

№ 4.27; 4.30; 4.35; 4.37 (а); 4.42.

IV. Задание на дом

№ 4.28; 4.31; 4.34; 4.38 (в); 4.39 (г); 4.41.

V. Подведение итогов урока

§ 5. Координатная прямая

Урок 9. Изображение точек на координатной прямой

Цель: напомнить понятие координатной прямой и изображение чисел на оси.

Ход урока

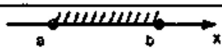
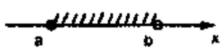
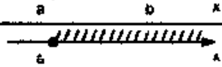
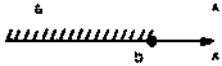
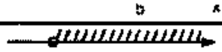
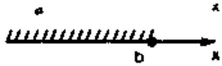
I. Сообщение темы и цели урока

II. Изучение нового материала

Прямая, на которой выбрано начало отсчета (точка O), **масштаб и положительное направление, называется координатной прямой** (или **координатной осью**). При этом **каждому числу** на координатной прямой соответствует **единственная точка**. И обратно: **любой точке** на координатной оси соответствует **определенное число**.

Координатная прямая дает возможность легко **переходить с алгебраического языка на геометрический** и обратно, позволяет придать **наглядный вид** алгебраическим результатам. Пусть, например, число a больше числа b. На алгебраическом языке это означает, что $a > b$. На геометрическом языке это значит, что на координатной прямой точка a расположена правее точки b.

В дальнейшем нам понадобятся различные числовые промежутки, которые для удобства приведены в таблице.

Вид промежутка	Геометрическая модель	Обозначение	Алгебраическая модель
Интервал		(a, b)	$a < x < b$
Отрезок		$[a, b]$	$a \le x \le b$
Полуинтервал	 	$(a, b]$ $[a, b)$	$a < x \le b$ $a \le x < b$
Луч	 	$[a, +\infty)$ $(-\infty, b]$	$x \ge a$ $x \le b$
Открытый луч	 	$(a, +\infty)$ $(-\infty, b)$	$x > a$ $x < b$

Знак «∞» читается: бесконечность.

На практике не всегда используют термины «интервал», «отрезок», «луч» и т. д., заменяя их общим названием «числовой промежуток».

III. Задание на уроке

№ 5.2 (а); 5.4; 5.7 (а); 5.10 (б); 5.17; 5.22; 5.31; 5.37; 5.42 (а, б).

IV. Задание на дом

№ 5.2 (б)4 5.5; 5.7 (б); 5.9 (в); 5.16; 5.24; 5.28; 5.33; 5.38; 5.42 (в, г).

V. Подведение итогов урока

Уроки 10–11. Контрольная работа № 1 по теме «Математический язык. Математическая модель»

Контрольная работа составлена в шести вариантах различной сложности (варианты 1, 2 – самые простые, варианты 3, 4 – средней сложности, варианты 5, 6 – самые сложные). Степень сложности меняется не слишком резко. Поэтому можно рекомендовать следующие критерии оценки: при решении вариантов 1, 2 оценка «3» ставится за любые три решенные задачи, оценка «4» – за четыре задачи и оценка «5» – за пять задач. Одна задача дает школьникам некоторую свободу выбора. При тех же критериях оценки за решение вариантов 3, 4 добавляется к набранным баллам дополнительно 0,5 балла; за решение вариантов 5, 6 – дополнительно 1,0 балл (т. е. оценка «5» ставится уже за 4 задачи). Все задачи в варианте примерно равноценны. Могут быть несколько тяжелее задачи 5 и 6.

Перед проведением контрольной работы целесообразно ознакомить учащихся с критериями оценки и разной сложностью вариантов. Выбор вариантов может быть осуществлен учителем или предоставлен самим учащимся (в этом случае предполагается наличие копировальной техники в школе и избыточное количество заданий работы). При наличии такой техники в классе на стенде (после урока – разбора контрольной) может быть вывешено решение всех задач шести вариантов. Разумеется, разобрать такое количество задач на уроке невозможно (да и не нужно).

Вариант 1

1. Какие из чисел –3; –2; 2; 3 являются корнями уравнения?

а) $x^2 + 8 = 6x$; б) $|x - 6| = 3 - 2x$.

2. Решите уравнение:

а) $(2x - 1)(x + 3) = 0$; б) $\frac{3x-2}{5} = \frac{2x-3}{4}$.

3. При каком значении переменной разность выражений $6x - 7$ и $2x + 3$ равна 4?

4. При каком значении параметра a уравнение $ax = 3a + x$ имеет единственный корень? Найдите его.

5. На базе хранится 520 т рыбы. При этом трески в 1,5 раза больше, чем наваги. Окуня на 16 т больше, чем трески. Сколько тонн трески, наваги и окуня находится на складе?

6. Найдите три последовательных натуральных числа, если утроенная сумма крайних чисел на 145 больше среднего числа.

Вариант 2

1. Какие из чисел –3; –2; 2; 3 являются корнями уравнения?

а) $x^2 + 9 = 6x$; б) $|x - 4| = -2 - 4x$.

2. Решите уравнение:

а) $(1 - 3x)(x + 2) = 0$; б) $\frac{2x-3}{3} = \frac{4x-1}{5}$.

3. При каком значении переменной разность выражений $8x - 3$ и $3x + 4$ равна 5?

4. При каком значении параметра a уравнение $ax = 4a + 2x$ имеет единственный корень? Найдите его.

5. На базе хранится 590 т овощей. При этом картофеля в 2,5 раза больше, чем моркови. Лука на 14 т больше, чем картофеля. Сколько тонн картофеля, моркови и лука находится на базе?

6. Найдите три последовательных натуральных четных числа, если удвоенная сумма крайних чисел на 84 больше среднего числа.

Вариант 3

1. Не решая уравнения $9(2x-1)+6(3x+1)=127$, докажите, что оно не имеет целых корней.

2. Решите уравнение:

а) $\frac{2x-3}{3} - \frac{x+2}{4} = \frac{5}{12}$; б) $|3x - 1| = 5$.

3. Оля задумала число и уменьшила его на 3. Этот результат умножила на 4 и прибавила 7. В итоге получилось 31. Найдите задуманное число.

4. При всех значениях параметра a решите уравнение $(a - 3)x = 2a - 6$.

5. На трех автобазах находится 606 машин. На второй базе на 18 машин больше, чем на первой. На третьей базе в 2 раза больше машин, чем на первых двух базах вместе. Какой процент от всех машин находится на третьей базе? Сколько машин на первой базе?

6. При каком наименьшем натуральном значении параметра a уравнение $3(x - 1) = a - 8$ имеет положительный корень?

Вариант 4

1. Не решая уравнения $6(4x+1)+9(2x-3)=128$, докажите, что оно не имеет целых корней.

2. Решите уравнение:

а) $\frac{3x-1}{4}-\frac{4x+1}{3}=\frac{7}{12}$; б) $|7x-3|=4$.

3. Юра задумал число и увеличил его на 2. Этот результат умножил на 5 и вычел 6. В итоге получилось 49. Найдите задуманное число.

4. При всех значениях параметра a решите уравнение $(a-2)x=3a-6$.

5. На трех складах хранится 624 компьютера. На третьем складе находится на 12 компьютеров меньше, чем на первом. На втором складе в 3 раза больше компьютеров, чем на первом и третьем складах вместе. Какой процент от всех компьютеров находится на втором складе? Сколько компьютеров на первом складе?

6. При каком наибольшем натуральном значении параметра a уравнение $4(x-2)=a-15$ имеет отрицательный корень?

Вариант 5

1. Решите уравнение $|x-1|+|x-4|=3$.

2. При всех значениях параметра a решите уравнение $(a-3)(a+2)x=a+2$.

3. Количество компьютеров на трех складах относится как 1 : 2 : 3. С первого склада было продано 7 компьютеров, с третьего склада – 16 компьютеров, а на второй склад привезли 17 компьютеров. После этого на втором складе стало столько же компьютеров, сколько на первом и третьем складе вместе. Сколько компьютеров было на каждом складе сначала?

4. Катер по течению реки за 5 ч проплыл такое же расстояние, которое проплывает против течения реки за 8 ч. Во сколько раз собственная скорость катера больше скорости течения реки?

5. Докажите, что уравнение $(x+3)(x+4)(x+5)=31$ не имеет целых корней.

6. При каких целых значениях параметра a уравнение $ax=5+2x$ имеет целые корни? Найдите эти корни.

Вариант 6

1. Решите уравнение $|x-2|+|x-5|=3$.

2. При всех значениях параметра a решите уравнение $(a-2)(a+3)x=a+3$.

3. Количество компьютеров на трех складах относится как 2 : 1 : 3. С первого склада было продано 9 компьютеров, с третьего склада – 27 компьютеров, а на второй склад привезли 32 компьютера. После этого на втором складе стало столько же компьютеров, сколько на первом и третьем складе вместе. Сколько компьютеров было на каждом складе сначала?

4. Катер по течению реки за 6 ч проплыл такое же расстояние, которое проплывает против течения реки за 9 ч. Во сколько раз собственная скорость катера больше скорости течения реки?

5. Докажите, что уравнение $(x+1)(x+2)(x+3)=25$ не имеет целых корней.

6. При каких целых значениях параметра a уравнение $ax = 7 + 3x$ имеет целые корни? Найдите эти корни.

Урок 12. Анализ контрольной работы

I. Итоги работы

1. Распределение работ по вариантам и результаты решения.

Данные о результатах работы удобно заносить в таблицу (для каждой пары вариантов).

№ задачи / Итоги	1	2	3	…	6
+	5				
±	1				
–	1				
Ø	1				

Обозначения:

+ – число решивших задачу правильно или почти правильно;

± – число решивших задачу со значительными погрешностями;

– – число не решивших задачу;

Ø – число не решавших задачу.

2. Типичные ошибки при решении задач.

3. Задачи, вызвавшие наибольшие трудности, и их разбор (учителем или школьниками, сделавшими эту задачу).

II. Ответы и решения

Ответы

Вариант 1

1. *Ответ*: а) 2; б) –3.
2. *Ответ*: а) $x = 0{,}5$ и $x = -3$; б) $x = -3{,}5$.
3. *Ответ*: $x = 3{,}5$.
4. *Ответ*: при $a \neq 1$ $x = \dfrac{3a}{a-1}$.
5. *Ответ*: 126 т наваги, 189 т трески, 205 т окуня.
6. *Ответ*: 28, 29, 30.

Вариант 2

1. *Ответ*: а) 3; б) –2.

2. *Ответ*: а) $x = \frac{1}{3}$ и $x = -2$; б) $x = -6$.

3. *Ответ*: $x = 2{,}4$.

4. *Ответ*: при $a \neq 2$ $x = \frac{4a}{a-2}$.

5. *Ответ*: 96 т моркови, 240 т картофеля, 254 т лука.

6. *Ответ*: 26, 28, 30.

Вариант 3

1. *Ответ*: доказано.

2. *Ответ*: а) $x = 4{,}6$; б) $x = 2$ и $x = -\frac{4}{3}$.

3. *Ответ*: $x = 9$.

4. *Ответ*: при $a \neq 3$ $x = 2$, при $a = 3$ x – любое число.

5. *Ответ*: $66\frac{2}{3}$ %, 92 машины.

6. *Ответ*: $a = 6$.

Вариант 4

1. *Ответ*: доказано.

2. *Ответ*: а) $x = -2$; б) $x = 1$ и $x = -\frac{1}{7}$.

3. *Ответ*: $x = 9$.

4. *Ответ*: при $a \neq 2$ $x = 3$, при $a = 2$ x – любое число.

5. *Ответ*: 75 %, 84 компьютера.

6. *Ответ*: $a = 6$.

Решения

Вариант 5

1. Для решения уравнения $|x-1|+|x-4|=3$ учтем геометрический смысл модуля. Величина $|x - 1|$ – расстояние от числа x до числа 1 на координатной прямой, величина $|x - 4|$ – расстояние от числа x до числа 4. Тогда геометрический смысл данного уравнения: сумма расстояний от числа x до чисел 1 и 4 должна равняться 3. Из рисунка видно, что для чисел $1 \le x \le 4$ такое условие выполняется. Таким образом, решение данного уравнения – любое число x из промежутка $1 \le x \le 4$.

Ответ: $1 \le x \le 4$.

2. Если коэффициент при x в уравнении $(a-3)(a+2)x = a+2$ не равен нулю (т. е. $(a - 3)(a + 2) \neq 0$ или $a \neq 3$ и $a \neq -2$), то уравнение имеет единственный корень: $x = \dfrac{a+2}{(a-3)(a+2)} = \dfrac{1}{a-3}$. Подставим значение $a = 3$ в данное уравнение и получим: $(3 - 3)(3 + 2)x = 3 + 2$ или $0 \cdot x = 5$. Такое уравнение решений не имеет. Подставим значения $a = -2$ в данное уравнение и получим: $(-2 - 3)(-2 + 2)x = -2 + 2$ или $0 \cdot x = 0$. Любое число x является решением данного уравнения.

Ответ: при $a \neq 3$ и $a \neq -2$ $x = \dfrac{1}{a-3}$, при $a = 3$ решений нет, при $a = -2$ x – любое число.

3. Так как число компьютеров на складах относится как $1 : 2 : 3$, то на первом складе находится x штук, на втором – $2x$ штук и на третьем – $3x$ штук. В соответствии с условиями задачи после продажи и поступления компьютеров на склады их стало: на первом складе – $x - 7$, на втором складе – $2x + 17$ и на третьем складе – $3x - 16$. После этого на втором складе стало столько же компьютеров, сколько на первом и третьем складе вместе. Поэтому получаем уравнение $2x + 17 = (x - 7) + (3x - 16)$, или $2x + 17 = 4x - 23$, или $40 = 2x$, откуда $x = 20$. Следовательно, на складах было: на первом – 20 штук, на втором – $2 \cdot 20 = 40$ штук, на третьем – $3 \cdot 20 = 60$ штук.

Ответ: 20; 40; 60.

4. Пусть собственная скорость катера x км/ч, скорость течения реки y км/ч. По течению реки, двигаясь со скоростью $x + y$ км/ч, катер за 5 ч проплыл расстояние $5(x + y)$ км. Против течения реки, двигаясь со скоростью $x - y$ км/ч, катер за 8 ч проплыл расстояние $8(x - y)$ км. По условию эти расстояния одинаковы. Поэтому получаем уравнение $5(x + y) = 8(x - y)$, или $5x + 5y = 8x - 8y$, или $5y + 8y = 8x - 5x$, или $13y = 3x$, откуда $x = \dfrac{13y}{3} = 4\dfrac{1}{3}y$. Следовательно, собственная скорость катера больше скорости течения реки в $4\dfrac{1}{3}$ раза.

Ответ: $4\dfrac{1}{3}$.

5. Пусть уравнение $(x+3)(x+4)(x+5) = 31$ имеет целый корень x, тогда числа $x + 3$, $x + 4$, $x + 5$ – целые и последовательные. Среди трех последовательных целых чисел обязательно одно делится на 2 и одно – на 3 (например, числа 7, 8, 9), поэтому произведение таких чисел без остатка делится на $2 \cdot 3 = 6$. Следовательно, левая часть уравнения кратна 6. В правой части уравнения стоит число 31, кото-

рое делится на 6 с остатком 1. Получаем противоречие. Поэтому данное уравнение не может иметь целых корней.

Ответ: доказано.

6. Уравнение $ax = 5 + 2x$ запишем в виде $ax - 2x = 5$ или $(a-2)x=5$.

При $a \neq 2$ это уравнение имеет корень $x = \dfrac{5}{a-2}$. Чтобы такой корень был целым числом, надо чтобы целое число $a - 2$ было делителем числа 5 (т. е. ± 1, ± 5). Поэтому рассмотрим четыре случая:

а) $a - 2 = 1$ (т. е. $a = 3$), тогда $x = \dfrac{5}{1} = 5$;

б) $a - 2 = -1$ (т. е. $a = 1$), тогда $x = \dfrac{5}{-1} = -5$;

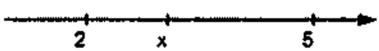
в) $a - 2 = 5$ (т. е. $a = 7$), тогда $x = \dfrac{5}{5} = 1$;

г) $a - 2 = -5$ (т. е. $a = -3$), тогда $x = \dfrac{5}{-5} = -1$.

Ответ: при $a = 3$ $x = 5$; при $a = 1$ $x = -5$; при $a = 7$ $x = 1$; при $a = -3$ $x = -1$.

Вариант 6

1. Для решения уравнения $|x-2|+|x-5|=3$ учтем геометрический смысл модуля. Величина $|x - 2|$ – расстояние от числа x до числа 2 на координатной прямой, величина $|x - 5|$ – расстояние от числа x до числа 5. Тогда геометрический смысл данного уравнения: сумма расстояний от числа x до чисел 2 и 5 должна равняться 3. Из рисунка видно, что для чисел $2 \leq x \leq 5$ такое условие выполняется. Таким образом, решение данного уравнения – любое число x из промежутка $2 \leq x \leq 5$.



Ответ: $2 \leq x \leq 5$.

2. Если коэффициент при x в уравнении $(a-2)(a+3)x = a+3$ не равен нулю (т. е. $(a - 2)(a + 3) \neq 0$ или $a \neq 2$ и $a \neq -3$), то уравнение имеет единственный корень: $x = \dfrac{a+3}{(a-2)(a+3)} = \dfrac{1}{a-2}$. Подставим значение $a = 2$ в данное уравнение и получим: $(2 - 2)(2 + 3)x = 2 + 3$ или $0 \cdot x = 5$. Такое уравнение решений не имеет. Подставим значения $a = -3$ в данное уравнение и получим: $(-3 - 2)(-3 + 3)x = -3 + 3$ или $0 \cdot x = 0$. Любое число x является решением данного уравнения.

Ответ: при $a \neq 2$ и $a \neq -3$ $x = \dfrac{1}{a-2}$, при $a = 2$ решений нет, при $a = -3$ x – любое число.

3. Так как число компьютеров на складах относится как 2 : 1 : 3, то на первом складе находится $2x$ штук, на втором – x штук и на третьем – $3x$ штук. В соответствии с условиями задачи после продажи и поступления компьютеров на склады их стало: на первом складе – $2x - 9$, на втором складе – $x + 32$ и на третьем складе – $3x - 27$. После этого на втором складе стало столько же компьютеров, сколько на первом и третьем складе вместе. Поэтому получаем уравнение $x+32=(2x-9)+(3x-27)$, или $x + 32 = 5x - 36$, или $68 = 4x$, откуда $x = 17$. Следовательно, на складах было: на первом – $2\cdot 17 = 34$ штуки, на втором – 17 штук, на третьем – $3\cdot 17 = 51$ штука.

Ответ: 34; 17; 51.

4. Пусть собственная скорость катера x км/ч, скорость течения реки y км/ч. По течению реки, двигаясь со скоростью $x + y$ км/ч, катер за 6 ч проплыл расстояние $6(x + y)$ км. Против течения реки, двигаясь со скоростью $x - y$ км/ч, катер за 9 ч проплыл расстояние $9(x - y)$ км. По условию эти расстояния одинаковы. Поэтому получаем уравнение $6(x + y) = 9(x - y)$, или $6x + 6y = 9x - 9y$, или $6y + 9y = 9x - 6x$, или $15y = 3x$, откуда $x=\frac{15y}{3}=5y$. Следовательно, собственная скорость катера больше скорости течения реки в 5 раз.

Ответ: 5.

5. Пусть уравнение $(x+1)(x+2)(x+3)=25$ имеет целый корень x, тогда числа $x + 1$, $x + 2$, $x + 3$ – целые и последовательные. Среди трех последовательных целых чисел обязательно одно делится на 2 и одно – на 3 (например, числа 13, 14, 15), поэтому произведение таких чисел без остатка делится на $2\cdot 3 = 6$. Следовательно, левая часть уравнения кратна 6. В правой части уравнения стоит число 25, которое делится на 6 с остатком 1. Получаем противоречие. Поэтому данное уравнение не может иметь целых корней.

Ответ: доказано.

6. Уравнение $ax=7+3x$ запишем в виде $ax-3x=7$ или $(a-3)x=7$.

При $a \neq 3$ это уравнение имеет корень $x=\frac{7}{a-3}$. Чтобы такой корень был целым числом, надо чтобы целое число $a - 3$ было делителем числа 7 (т. е. ± 1, ± 7). Поэтому рассмотрим четыре случая:

а) $a - 3 = 1$ (т. е. $a = 4$), тогда $x=\frac{7}{1}=7$;

б) $a - 3 = -1$ (т. е. $a = 2$), тогда $x=\frac{7}{-1}=-7$;

в) $a - 3 = 7$ (т. е. $a = 10$), тогда $x = \frac{7}{7} = 1$;

г) $a - 3 = -7$ (т. е. $a = -4$), тогда $x = \frac{7}{-7} = -1$.

Ответ: при $a = 4$ $x = 7$; при $a = 2$ $x = -7$; при $a = 10$ $x = 1$; при $a = -4$ $x = -1$.

Уроки 13–14. Зачет по теме «Математический язык. Математическая модель»

Цели: сравнение успеваемости учащихся при одинаковой сложности заданий, возможность повышения оценки за контрольную работу.

Ход уроков

I. Сообщение темы и целей уроков

II. Характеристика зачетной работы

Работа составлена в двух равноценных вариантах. По сравнению с контрольной работой увеличено количество заданий. Соответственно у учащихся возрастает возможность выбора задач. Все задания разбиты на три блока А, В и С. Самые простые задачи находятся в блоке А, более сложные - в блоке В, еще сложнее – в блоке С. Каждая задача из блока А оценивается в 1 балл, из блока В – в 2 балла, из блока С – в 3 балла. Поэтому за правильное решение всех задач блока А можно получить 7 баллов, блока В – 8 баллов и блока С – 9 баллов (всего 24 балла). Оценка «3» ставится за 6 баллов, оценка «4» – за 10 баллов, оценка «5» – за 14 баллов.

Так как эта работа является зачетной, то в нее не включены принципиально новые задачи. Поэтому разбору заданий работы занятия можно и не посвящать (решения задач могут быть вывешены на стенде). Для стендового размещения разбор вариантов приводится.

Вариант 1

А

1. Найдите значение выражения $\frac{4a + 3ab + 7b}{a + 2ab + 5b}$ при $a = 2$, $b = 3$.

2. Укажите допустимые значения переменной в выражении $\frac{3a-4}{2(a-3)-(a+1)} + \frac{5a-4}{3(1-a)+4(a-2)}$.

3. Является ли равенство $3a+4ab+3b=4ba+3(b+a)$ тождеством и почему?

4. Решите уравнение $2(x-3)=7(2-x)$.

5. Решите уравнение $2|x-5|=4$.

6. Докажите, что уравнение $3|x|+x^2+7=6$ не имеет решений.

7. Докажите, что уравнение $2x^2+5x+1=0$ не имеет положительных корней.

В

8. Упростите выражение $1{,}7(2a-3)+0{,}6(3a-1)-0{,}4(a-8)$.

9. Решите уравнение $|4-x|=x-4$.

10. Решите уравнение $(3x-2)(2x-4)=0$.

11. Докажите, что уравнение $2(x-3)^2+4|x-5|+1=0$ не имеет решений.

С

12. Решите уравнение $3(x-2)^2+4|6-3x|=0$.

13. При каких значениях параметра a уравнение $3ax=5a-3x+5$ имеет корни 3, 7 и 15?

14. Докажите, что не существуют целые числа x и y, при которых выполняется равенство $(x+3)(x+4)=8y+5$.

Вариант 2

А

1. Найдите значение выражения $\dfrac{3a+7ab+5b}{2a+3ab+4b}$ при $a=3$, $b=2$.

2. Укажите допустимые значения переменной в выражении $\dfrac{5a-3}{4(a-2)-3(a-1)}-\dfrac{7a+5}{4(1-a)+5(a-3)}$.

3. Является ли равенство $7a+2ab+7b=2ba+7(b+a)$ тождеством и почему?

4. Решите уравнение $3(x-4)=5(3-x)$.

5. Решите уравнение $3|4-x|=6$.

6. Докажите, что уравнение $|x|+2x^2+5=4$ не имеет решений.

7. Докажите, что уравнение $3x^2+7x+2=0$ не имеет положительных корней.

В

8. Упростите выражение $2{,}7(3a+5)+0{,}4(2a-3)-0{,}6(a-3)$.

9. Решите уравнение $|5-x|=x-5$.

10. Решите уравнение $(2x-5)(3x-4)=0$.

11. Докажите, что уравнение $5(x-4)^2+7|x-5|+2=0$ не имеет решений.

С

12. Решите уравнение $2(x-3)^2+5|9-3x|=0$.

13. При каких значениях параметра a уравнение $7ax=4a-7x+4$ имеет корни 2, 5 и 17?

14. Докажите, что не существуют целые числа x и y, при которых выполняется равенство $(x+5)(x+6)=6y+3$.

III. Ответы и решения

Вариант 1

1. *Ответ*: $1\frac{18}{19}$.

2. *Ответ*: $a\neq 7$ и $a\neq 5$.

3. *Ответ*: является.

4. *Ответ*: $x=2\frac{2}{9}$.

5. *Ответ*: $x=7$ и $x=3$.

6. *Ответ*: доказано.

7. *Ответ*: доказано.

8. *Ответ*: $4{,}8a-2{,}5$.

9. *Ответ*: $x\geq 4$.

10. *Ответ*: $x=\frac{2}{3}$ и $x=2$.

11. *Ответ*: доказано.

12. В уравнении $3(x-2)^2+4|6-3x|=0$ каждое слагаемое при всех значениях x неотрицательно. Поэтому их сумма будет равняться нулю только в том случае, если каждое из них равно нулю, т. е. $3(x-2)^2=0$ и $4|6-3x|=0$. Первое уравнение разделим на 3, второе – на 4. Получаем уравнения $(x-2)^2=0$ и $|6-3x|=0$. Если квадрат некоторой величины равен нулю, то и сама величина равна нулю, т. е. $x-2=0$, откуда $x=2$. Проверим подстановкой, что при таком значении x выполняется и второе уравнение $|6-3\cdot 2|=|6-6|=|0|=0$. Итак, данное уравнение имеет единственный корень: $x=2$.

Ответ: $x=2$.

13. Линейное уравнение $3ax=5a-3x+5$ запишем в стандартном виде: $3ax+3x=5a+5$ или $3x(a+1)=5(a+1)$. Если коэффициент при x не равен нулю (т. е. $a+1\neq 0$ или $a\neq -1$), то уравнение имеет единственный корень: $x=\frac{5(a+1)}{3(a+1)}=\frac{5}{3}$ и условие задачи не выполня-

ется. При $a = -1$ данное уравнение имеет вид $x \cdot 0 = 0$. Поэтому любое значение x является корнем уравнения. Следовательно, в этом случае уравнение будет иметь корни 3, 7 и 15.

Ответ: $a = -1$.

14. Пусть существуют целые числа x и y, которые удовлетворяют уравнению $(x+3)(x+4) = 8y+5$. Тогда числа $x + 3$ и $x + 4$ – два целых последовательных числа. Одно из этих чисел четное, и произведение $(x + 3)(x + 4)$ является четным числом. Число $8y = 2\cdot(4y)$ четное. Тогда сумма четного числа $8y$ и нечетного числа 5 будет числом нечетным. Получаем противоречие: левая часть уравнения – четное число, правая часть – нечетное число. Следовательно, величины x и y не могут быть целыми числами.

Ответ: доказано.

Вариант 2

1. *Ответ*: $1\frac{29}{32}$.
2. *Ответ*: $a \neq 5$ и $a \neq 11$.
3. *Ответ*: является.
4. *Ответ*: $x = 3\frac{3}{4}$.
5. *Ответ*: $x = 2$ и $x = 6$.
6. *Ответ*: доказано.
7. *Ответ*: доказано.
8. *Ответ*: $8{,}3a + 14{,}1$.
9. *Ответ*: $x \geq 5$.
10. *Ответ*: $x = 2{,}5$ и $x = \frac{4}{3}$.
11. *Ответ*: доказано.

12. В уравнении $2(x-3)^2 + 5|9-3x| = 0$ каждое слагаемое при всех значениях x неотрицательно. Поэтому их сумма будет равняться нулю только в том случае, если каждое из них равно нулю, т. е. $2(x - 3)^2 = 0$ и $5|9 - 3x| = 0$. Первое уравнение разделим на 2, второе – на 5. Получаем уравнения $(x - 3)^2 = 0$ и $|9 - 3x| = 0$. Если квадрат некоторой величины равен нулю, то и сама величина равна нулю, т. е. $x - 3 = 0$, откуда $x = 3$. Проверим подстановкой, что при таком значении x выполняется и второе уравнение $|9 - 3\cdot3| = |9 - 9| = |0| = 0$. Итак, данное уравнение имеет единственный корень: $x = 3$.

Ответ: $x = 3$.

13. Линейное уравнение $7ax = 4a - 7x + 4$ запишем в стандартном виде: $7ax + 7x = 4a + 4$ или $7x(a+1) = 4(a+1)$. Если коэффициент

при x не равен нулю (т. е. $a + 1 \neq 0$ или $a \neq -1$), то уравнение имеет единственный корень: $x = \frac{4(a+1)}{7(a+1)} = \frac{4}{7}$ и условие задачи не выполняется. При $a = -1$ данное уравнение имеет вид $x \cdot 0 = 0$. Поэтому любое значение x является корнем уравнения. Следовательно, в этом случае уравнение будет иметь корни 2, 5 и 17.

Ответ: $a = -1$.

14. Пусть существуют целые числа x и y, которые удовлетворяют уравнению $(x+5)(x+6) = 6y+3$. Тогда числа $x + 5$ и $x + 6$ – два целых последовательных числа. Одно из этих чисел четное, и произведение $(x + 5)(x + 6)$ является четным числом. Число $6y = 2\cdot(3y)$ четное. Тогда сумма четного числа $6y$ и нечетного числа 3 будет числом нечетным. Получаем противоречие: левая часть уравнения – четное число, правая часть – нечетное число. Следовательно, величины x и y не могут быть целыми числами.

Ответ: доказано.

Глава 2. Линейная функция

§ 6. Координатная плоскость

Урок 15. Изображение точки на координатной плоскости

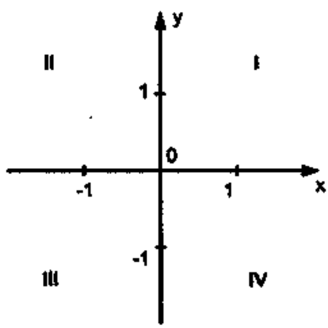
Цель: напомнить понятие координатной плоскости и рассмотреть изображение точки на плоскости.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Изучение нового материала

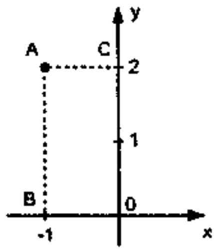
Для более сложных задач понадобится и более сложная графическая модель – координатная плоскость. **Две взаимно перпендикулярные числовые оси образуют прямоугольную систему координат. Прямые углы, образуемые осями координат, называют координатными углами (квадрантами)** и нумеруют так, как показано на рисунке. **Горизонтальная ось системы координат (ось 0x) называется осью абсцисс; вертикальная ось (ось 0y) – осью ординат.**



Так же как и на числовой оси может быть изображено любое число, так и **любая пара чисел** $(x; y)$ (причем первое число обязательно x, второе – y) **может быть изображена в прямоугольной системе координат.**

Пример 1

Построим точку $A(-1; 2)$, т. е. точку A с координатами $x = -1$, $y = 2$.



Отложим на оси абсцисс (оси $0x$) число (-1) – точка B и восстановим из точки B перпендикуляр к оси $0x$. Отложим на оси ординат (оси $0y$) число 2 – точку C и восстановим из точки C перпендикуляр к оси $0y$. Точка A пересечения этих двух перпендикуляров будет искомой.

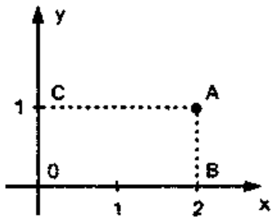
Аналогично может быть построена и любая точка $A(a; b)$ в прямоугольной системе координат $x0y$ **(алгоритм построения точки)**. Для этого надо:

1. Построить вертикальную прямую $x = a$.
2. Построить горизонтальную прямую $y = b$.
3. Найти точку пересечения этих прямых – точку $A(a; b)$.

Также справедливо и обратное утверждение: любая точка, изображенная в системе координат, **характеризуется парой чисел (координатами)**.

Пример 2

Найти координаты точки A, изображенной на рисунке.



Опустим из точки A перпендикуляр к оси абсцисс и получим точку B, которой соответствует число $x = 2$. Проведем из точки A перпендикуляр к оси ординат и получим точку C, которой отвечает число $y = 1$. Найденные значения x и y являются координатами точки A, т. е. точка A характеризуется парой чисел (2; 1), т. е. $A(2; 1)$.

Подобным образом можно найти координаты любой точки A, построенной в системе координат $x0y$ **(алгоритм нахождения координат точки)**. Для этого надо:

1. Провести через точку A вертикальную прямую и найти координату точки пересечения ее с осью x – абсциссу точки A.

2. Провести через точку A горизонтальную прямую и найти координату точки пересечения ее с осью y – ординату точки A.

Заметим, что если точка лежит на оси абсцисс, то ее координата $y = 0$. Если точка лежит на оси ординат, то ее координата $x = 0$.

В заключение отметим, что впервые прямоугольную систему координат на плоскости в 1637 г. ввел французский математик Рене Декарт (1596–1650) в работе «Геометрия». Такой подход позволил использовать графические методы при решении алгебраических задач. И наоборот, алгебраические способы стали применяться при решении геометрических задач. С упомянутой работы начал развиваться новый раздел математики – **аналитическая геометрия.** Прямоугольную систему координат часто называют декартовой системой координат.

III. Задание на уроке

№ 6.2 (г); 6.5 (а, в); 6.7 (г); 6.15 (б); 6.19; 6.22; 6.25 (а); 6.28 (в, г); 6.33.

IV. Контрольные вопросы

1. Дайте определение прямоугольной системы координат.
2. Алгоритм нахождения координат точки.
3. Алгоритм построения точки в системе координат.

V. Задание на дом

№ 6.2 (в); 6.5 (б, г); 6.7 (б); 6.15 (в); 6.20; 6.24; 6.27 (а, б); 6.30 (а, б); 6.34.

VI. Подведение итогов урока

§ 7. Линейное уравнение с двумя переменными и его график

Урок 16. Уравнения с двумя переменными

Цель: дать понятие об уравнении с двумя переменными, их решении и графике уравнения.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Алгоритм нахождения координат точки.
2. Постройте прямую, проходящую через точки $A(1; 3)$ и $B(-2; 6)$.
3. Напишите координаты точек B и C, симметричных точке $A(-2; 4)$ относительно оси x и оси y соответственно.

Вариант 2

1. Алгоритм построения точки в системе координат.
2. Постройте прямую, проходящую через точки $A(-2; 1)$ и $B(1; 4)$.
3. Напишите координаты точек B и C, симметричных точке $A(2; -3)$ относительно оси x и оси y соответственно.

III. Изучение нового материала

Пример 1

Пусть первое число (обозначим его x) больше квадрата второго числа (обозначим его y) на 3. По условию соотношение между числами можно описать равенством $x - y^2 = 3$. Это равенство с двумя переменными x и y, очевидно, выполняется не при всех значениях переменных. Подстановкой в равенство $x - y^2 = 3$ убеждаемся, что при $x = 7$ и $y = 2$ оно выполняется. Для значений $x = 5$ и $y = 2$ такое равенство не выполняется. Поэтому подобные равенства с двумя переменными называют **уравнениями с двумя переменными** (или двумя неизвестными). Пару чисел $x = 7$ и $y = 2$ называют **решением уравнения**. Решение можно записать также в виде (7; 2), где первое число соответствует неизвестной x, второе число – неизвестной y. Почетче сформулируем основные понятия.

Равенство, содержащее две переменные, называется уравнением с двумя переменными (или двумя неизвестными). В частности, **если в уравнение неизвестные входят только в первой степени, то такое уравнение называют линейным уравнением с двумя переменными. Линейное уравнение имеет вид** $ax + by + c = 0$ (где x и y – переменные, a, b и c – некоторые числа).

Например, линейными являются уравнения $3x - 4y + 1 = 0$, $5x + 7y = 0$ и т. д.

Решением уравнения с двумя неизвестными называется пара значений переменных (x; y), при подстановке которых уравнение становится верным числовым равенством.

Уравнения с двумя переменными, имеющие одни и те же решения, называют равносильными. Уравнения с двумя переменными, не имеющие решений, также считают равносильными.

Уравнения с двумя переменными обладают такими же свойствами, как и уравнения с одной переменной.

1. Если в уравнении перенести любой член из одной части в другую, изменив его знак, то получится уравнение, равносильное данному.

2. Если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же (не равное нулю) число, то получится уравнение, равносильное данному.

Пример 2

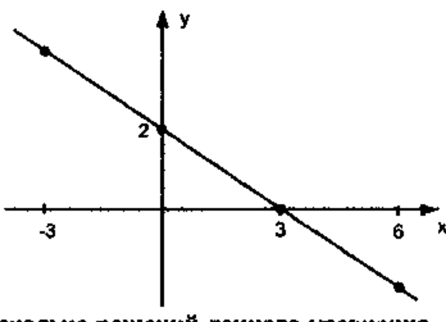
а) Уравнения $3x^2+4y^3=5$ и $3x^2=5-4y^3$ равносильны, т. к. член $4y^3$ перенесен (с изменением знака) из левой части в правую.

б) Уравнения $\frac{x^2}{4}+\frac{y^3}{3}=\frac{5}{12}$ и $3x^2+4y^3=5$ равносильны, т. к. обе части первого уравнения умножили на число 12 (не равное нулю) и получили: $\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^3}{3}\right)\cdot 12=\frac{5}{12}\cdot 12$, или $\frac{x^2}{4}\cdot 12+\frac{y^3}{3}\cdot 12=5$, или $3x^2+4y^3=5$.

В 7 классе изучаются **только линейные уравнения**, поэтому остановимся на них подробнее.

Пример 3

Рассмотрим уравнение $2x+3y-6=0$ и построим его график.



Подберем несколько решений данного уравнения. Подстановкой в уравнение легко проверить, что числа $(-3;\ 4)$, $(0;\ 2)$, $(3;\ 0)$, $(6;\ -2)$ являются решениями данного уравнения. Построим эти точки на координатной плоскости. Они лежат на одной прямой. Проведем эту прямую, которая и будет графиком данного уравнения.

Замечания по примеру:

1. Для построения графика уравнения $2x + 3y - 6 = 0$ нам пришлось подбирать его решения. Можно было и **находить** такие **решения**. Возьмем, например, значение $x = -3$ и подставим его в уравнение. Для нахождения y получаем линейное уравнение $2\cdot(-3) + 3y - 6 = 0$ или $3y = 12$, откуда $y = 4$.

2. В курсе алгебры доказывается, что если один из коэффициентов a или b линейного уравнения $ax + by + c = 0$ не равен нулю, то графиком уравнения является **прямая линия**.

3. Для построения прямой линии достаточно **двух точек**. Поэтому использованные нами для построения графика четыре точки – явный перебор.

4. В качестве таких точек удобно выбирать точки пересечения графика функции с осями координат. Если подставим $x = 0$ в уравнение $2x + 3y - 6 = 0$, то получим уравнение для нахождения точки пересечения с осью ординат: $2\cdot0 + 3y - 6 = 0$, откуда $y = 2$. Если подставим $y = 0$ в уравнение, то получим уравнение для нахождения точки пересечения с осью абсцисс: $2x + 3\cdot0 - 6 = 0$, откуда $x = 3$. Отмечаем точки $(0; 2)$ и $(3; 0)$ на координатной плоскости и проводим через них прямую.

IV. Задание на уроке

№ 7.1 (а); 7.2 (б); 7.4 (г); 7.7 (а); 7.11 (б); 7.14 (г); 7.17 (а, г); 7.25 (а); 7.28 (б); 7.29 (г); 7.30; 7.39 (а, б).

V. Контрольные вопросы

1. Какое равенство называется уравнением с двумя переменными?
2. Что называется решением уравнения с двумя переменными?
3. Какое уравнение называется линейным?
4. Напишите общий вид линейного уравнения с двумя переменными.
5. Какие уравнения называются равносильными?
6. Как построить график линейного уравнения с двумя переменными?

VI. Задание на дом

№ 7.1 (б); 7.2 (а); 7.4 (в); 7.7 (б); 7.11 (г); 7.14 (б); 7.17 (б, в); 7.25 (б); 7.28 (в); 7.29 (б); 7.31; 7.39 (в, г).

VII. Подведение итогов урока

§ 8. Линейная функция и ее график

Урок 17. График линейной функции

Цель: рассмотреть линейную функцию и ее график.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1. Найдите два решения уравнения $2x - y - 4 = 0$ и постройте его график.

2. Известно, что (1; 2) – решение уравнения $3x + by + 1 = 0$. Найдите коэффициент b и еще одно решение этого уравнения.

Вариант 2

1. Найдите два решения уравнения $x + 2y + 4 = 0$ и постройте его график.

2. Известно, что (2; 1) – решение уравнения $ax + y - 3 = 0$. Найдите коэффициент a и еще одно решение этого уравнения.

III. Изучение нового материала

Для построения графика уравнения $ax + by + c = 0$ нам понадобилось для двух различных значений x_1 и x_2 **решать линейное уравнение** $ax + by + c = 0$ и находить соответствующие значения y_1 и y_2, поэтому разумно из соотношения $ax + by + c = 0$ **выразить переменную** y.

Пример 1

Из равенства $2x + 3y - 6 = 0$ выразим переменную y. Сначала из соотношения найдем $3y = -2x + 6$. Разделим обе части уравнения на 3, получаем: $y = -\frac{2}{3}x + 2$. Из этого равенства легко найти y для любого значения x. Например, при $x = -3$ получаем: $y = -\frac{2}{3}\cdot(-3) + 2 = 4$.

Теперь выполним те же преобразования в общем виде. Из уравнения $ax + by + c = 0$ найдем $by = -ax - c$. Для $b \neq 0$ разделим обе части равенства на число b и получим: $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$. Введем обозначения

$k=-\frac{a}{b}$ и $m=-\frac{c}{b}$. Тогда имеем $y = kx + m$. Таким образом, **линейное уравнение** $ax + by + c = 0$ при $b \neq 0$ **приводится к виду** $y = kx + m$, где k и m –коэффициенты.

Уравнение $y = kx + m$ является **частным случаем** линейного уравнения $ax + by + c = 0$. Для любого значения x, пользуясь правилом $y = kx + m$, легко найти соответствующее значение y. Такое правило называют **линейной функцией**. Итак, функция $y = kx + m$ (где k и m – некоторые числа) называется **линейной функцией**. Обратите внимание, что в формулу $y = kx + m$ **независимая переменная (или аргумент) x и зависимая переменная y входят в степени не выше первой.**

Пример 2

а) Функции $y = 5x - 3$, $y = -2x + 5$, $y = 7x$, $y = -x$ являются линейными, т. к. в эти функции переменная x входит в первой степени. Причем для первой функции $k = 5$, $m = -3$, для второй – $k = -2$, $m = 5$, для третьей – $k = 7$, $m = 0$, для четвертой – $k = -1$, $m = 0$.

б) Функции $y = -3$, $y = 0$, $y = 5$ также являются линейными. Для всех функций $k = 0$. При этом для первой функции $m = -3$, для второй – $m = 0$, для третьей – $m = 5$.

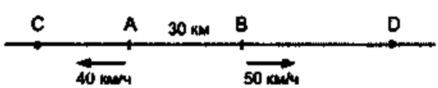
в) Функции $y = 2x^2 - 3$, $y=\frac{3}{5x-3}$, $y=\frac{-2x+5}{x}$ не являются линейными, т. к. в первую функцию переменная x входит во второй степени (x^2); вторая и третья функции вообще не описываются формулой $y = kx + m$ (хотя в эти функции аргумент x входит только в первой степени).

г) Функция $y = |x|$ не является линейной, т. к. зависит не от x, а от $|x|$. Однако если рассматривать только неотрицательные значения x, то это линейная функция $y = x$ ($k = 1$, $m = 0$), если рассматривать только отрицательные значения x, то это также линейная функция $y = -x$ ($k = -1$, $m = 0$).

Значительное число задач приводит к возникновению линейных функций.

Пример 3

Первоначальное расстояние между машинами 30 км. Машины движутся по прямолинейному шоссе в противоположные стороны со скоростями 40 км/ч и 50 км/ч. Найдем расстояние между машинами через t часов.



Пусть сначала машины находились в точках A и B, расстояние между которыми $AB = 30$ км. Через t часов одна машина окажется в точке C, пройдя расстояние $AC = 40t$ (км). Другая машина попадет в точку D, проехав расстояние $BD = 50t$ (км). Через t часов расстояние между машинами $S = CD = AC + AB + BD = 40t + 30 + 50t = 90t + 30$ (км). Зависимость расстояния между машинами от времени имеет вид $S = 90t + 30$ (где $t \geq 0$), т. е. является линейной функцией ($k = 90$, $m = 30$).

Пример 4

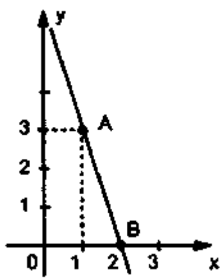
Вес ребенка в возрасте до 5 лет каждый год увеличивается на 3 кг. При рождении малыш весит 4 кг. Найдем вес ребенка y (кг) в возрасте x лет. За x лет вес ребенка возрастет на $3x$ (кг). Учтем первоначальный вес малыша, тогда через x лет он будет весить $y = 4 + 3x$ (кг). Зависимость веса ребенка y от его возраста x имеет вид $y = 3x + 4$ (где $0 \leq x \leq 5$), т. е. является линейной функцией ($k = 3$, $m = 4$).

Графиком линейной функции является **прямая линия**. Поэтому для построения графика достаточно найти любые **две точки**, принадлежащие графику, и **провести через них прямую**.

Пример 5

Построим график функции $y = -3x + 6$.

При $x = 1$ найдем $y(1) = -3\cdot1 + 6 = 3$, поэтому точка $A(1; 3)$ принадлежит графику функции. Для $x = 2$ найдем $y(2) = -3\cdot2 + 6 = 0$. Точка $B(2; 0)$ также принадлежит графику функции. На координатной плоскости построим эти точки A и B. С помощью линейки через точки A и B проведем прямую линию – график данной линейной функции.

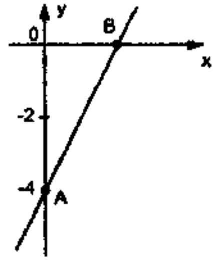


В качестве точек, через которые проходит график функции, достаточно часто удобно брать **точки пересечения графика с осями координат.**

Пример 6

Построим график функции $y = 2x - 4$, найдя точки пересечения его с осями координат.

Найдем точку пересечения графика функции с осью ординат. Как известно, для любой точки, расположенной на оси ординат, абсцисса равна нулю. Поэтому в зависимости $y = 2x - 4$ положим $x = 0$ и найдем $y = 2\cdot 0 - 4 = -4$. Такая точка пересечения – $A(0; -4)$, построим ее.



Теперь найдем точку пересечения графика с осью абсцисс. Любая точка на этой оси имеет ординату, равную нулю. Поэтому в зависимости $y = 2x - 4$ положим $y = 0$. Получаем линейное уравнение $0 = 2x - 4$, откуда $x = 2$. Имеем точку пересечения $B(2; 0)$ и строим ее. Через точки A и B проводим прямую линию – график данной функции.

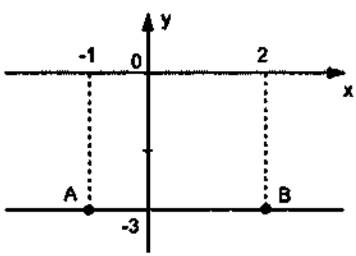
Из рассмотренного примера понятен смысл величины в зависимости $y = kx + m$. Это **ордината точки**, в которой **график функции пересекает ось** $0y$. Действительно, если положим $x = 0$, то получим $y = k\cdot 0 + m = m$ при всех значениях k. Это означает, что точка $(0; m)$ принадлежит графику функции $y = kx + m$ и является точкой пересечения графика с осью ординат.

Далее будет показано, что **величина k** определяет **наклон** графика функции $y = kx + m$, при $k = 0$ такая **прямая параллельна оси абсцисс** (или совпадает с ней).

Пример 7

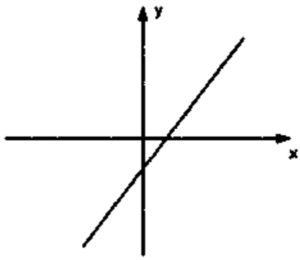
Построим график функции $y = -3$.

При любом значении аргумента x значение функции равно одной и той же величине $y = -3$. Поэтому, например, точки $A(-1; -3)$ и $B(2; -3)$ принадлежат графику функции. Построим эти точки на координатной плоскости и проведем через них прямую линию.

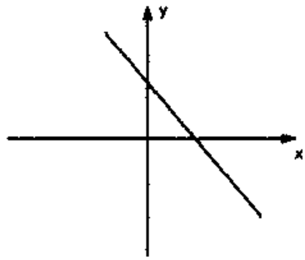


Получаем прямую, параллельную оси абсцисс.

В заключение обсудим понятие **монотонности** функции. Функция называется **возрастающей**, если **бóльшему значению аргумента** соответствует **бóльшее значение функции** (двигаясь по графику функции, мы поднимаемся **вверх**). Функция называется **убывающей**, если **бóльшему значению аргумента** соответствует **меньшее значение функции** (двигаясь по графику функции, мы опускаемся **вниз**). Возрастание и убывание функции носит общее название **монотонности** функции. Из примеров 5, 6 видно, что **линейная функция** $y = kx + m$ возрастает при $k > 0$ и убывает при $k < 0$.



Возрастающая функция
($k > 0$)



Убывающая функция
($k < 0$)

IV. Задание на уроке

№ 8.2; 8.6; 8.10 (а, г); 8.15 (а, в); 8.16 (в, г); 8.21; 8.29; 8.35; 8.45 (а, г); 8.51 (а, в); 8.55; 8.58 (а); 8.59 (в); 8.60; 8.62 (а, б).

V. Контрольные вопросы

1. Какая функция является линейной? Приведите примеры.
2. Что является графиком линейной функции? Как можно построить такой график?
3. Как найти точки пересечения графика линейной функции с осями координат? Поясните на примере.
4. Смысл величин k и m в формуле линейной функции.
5. Какая прямая будет графиком линейной функции при $k = 0$?
6. Дайте определение возрастающей (убывающей) функции.
7. Как влияет коэффициент k на возрастание (убывание) линейной функции $y = kx + m$?

VI. Задание на дом

№ 8.3; 8.7; 8.11 (б, г); 8.15 (б, г); 8.16 (а, б); 8.22; 8.30; 8.34; 8.45 (б, в); 8.51 (б, г); 8.56; 8.58 (г); 8.59 (б); 8.61; 8.62 (в, г).

VII. Подведение итогов урока

§ 9. Линейная функция $y = kx$

Урок 18. Прямая пропорциональность

Цель: рассмотреть прямую пропорциональность $y = kx$ и ее график.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Дайте определение возрастающей функции.
2. При каком значении k линейная функция $y = kx + m$ убывает?
3. Постройте график функции $y = -2x - 4$.
4. График функции $y = kx + 3$ проходит через точку $A(1; 5)$. Найдите коэффициент k.

Вариант 2

1. Дайте определение убывающей функции.
2. При каком значении k линейная функция $y = kx + m$ возрастает?
3. Постройте график функции $y = 2x + 2$.
4. График функции $y = -2x + m$ проходит через точку $A(2; -1)$. Найдите коэффициент m.

III. Изучение нового материала

Очень часто приходится рассматривать частный случай линейной функции $y = kx + m$, когда число $m = 0$. Тогда функцию $y = kx$ называют **прямой пропорциональной зависимостью (или прямой пропорциональностью)**, а число k – **коэффициентом пропорциональности**.

Пример 1

При растяжении пружины по закону Гука сила упругости F пропорциональна удлинению пружины l, т. е. $F = al$ (где коэффициент a определяется материалом, толщиной, закалкой пружины и т. д.).

Пример 2

При движении машины с постоянной скоростью v пройденный путь s пропорционален времени движения t машины, т. е. $s = vt$.

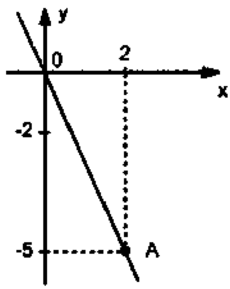
Графиком прямой пропорциональности $y = kx$ будет **прямая, проходящая через начало координат**. Действительно при $x = 0$ величина $y = k \cdot 0 = 0$ при любом значении k. Следовательно, график проходит через точку (0; 0) – начало координат. Поэтому для построения графика функции $y = kx$ достаточно взять еще только одну точку.

Пример 3

Построим график функции $y = -2,5x$.

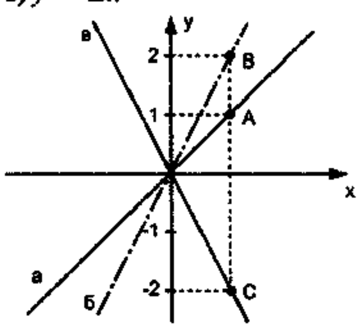
Так как $y = -2,5x$ – прямая пропорциональная зависимость, то ее график проходит через начало координат. Найдем еще одну точку, расположенную на графике. Например, для $x = 2$ получаем: $y = -2,5 \cdot 2 = -5$, т. е. искомая точка $A(2; -5)$.

Построим эту точку на координатной плоскости. Через точку A и начало координат с помощью линейки проведем прямую линию, которая будет являться графиком данной функции.



Пример 4

В одной и той же системе координат построим графики функций: а) $y = x$; б) $y = 2x$; в) $y = -2x$.



Все три графика проходят через начало координат. Возьмем еще значение $x = 1$. Для функции а) получаем $y = 1$ (точка $A(1; 1)$); для функции б) $-y = 2$ (точка $B(1; 2)$); для функции в) $-y = -2$ (точка $C(1; -2)$). Теперь построим эти три прямые а, б, в.

Видно, что при **положительных** значениях k (прямые а и б) графики располагаются в **первом и третьем координатных углах.**

Причем чем больше значение k, тем быстрее меняется функция (больше угол наклона прямой к оси абсцисс).

При **отрицательных** значениях k (прямая в) график располагается **во втором и четвертом координатных углах.**

Таким образом, **коэффициент k** характеризует **расположение графика функции и скорость изменения функции** (угол наклона графика к оси абсцисс). Поэтому **коэффициент k** еще называется **угловым коэффициентом.**

IV. Задание на уроке

№ 9.1 (в); 9.4 (г); 9.84 9.12 (а); 9.14; 9.17.

V. Контрольные вопросы

1. Какая функция называется прямой пропорциональной зависимостью?
2. Приведите примеры прямых пропорциональных зависимостей.
3. На что влияет угловой коэффициент k?

VI. Задание на дом

№ 9.1 (б); 9.4 (в); 9.7; 9.9; 9.13 (а); 9.15; 9.18.

VII. Подведение итогов урока

§ 10. Взаимное расположение графиков линейных функций

Уроки 19–20. Расположение прямых на координатной плоскости

Цель: рассмотреть относительное расположение двух прямых на координатной плоскости.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).
2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Какая функция называется прямой пропорциональностью?
2. В одной системе координат постройте графики функций:
   а) $y = 1{,}5x$;
   б) $y = -2{,}5x$.
3. График функции $y = kx$ проходит через точку $A(2; -3)$. Найдите угловой коэффициент k. Пройдет ли график этой функции через точку $B(4; -5)$?

Вариант 2

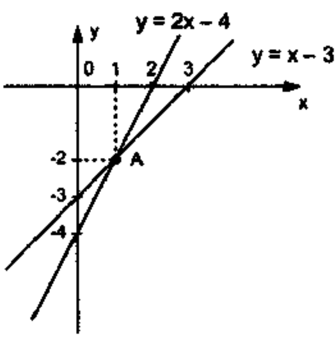
1. На что влияет угловой коэффициент k?
2. В одной системе координат постройте графики функций:
   а) $y = 2{,}5x$;
   б) $y = -1{,}5x$.
3. График функции $y = kx$ проходит через точку $A(3; -4)$. Найдите угловой коэффициент k. Пройдет ли график этой функции через точку $B(6; -7)$?

III. Изучение нового материала

Представим себе две прямые, построенные на координатной плоскости. Очевидно, возможны только **три случая** их взаимного расположения: или **прямые пересекаются**, или **прямые параллельны**, или **прямые совпадают**. Другой возможности представить себе нельзя. Рассмотрим эти три случая на примерах.

Пример 1

Построим графики линейных функций $y = x - 3$ и $y = 2x - 4$. Видно, что построенные прямые пересекаются в точке A. Найдем координаты этой точки. Так как A точка пересечения прямых, то ее координаты $(x_0; y_0)$ удовлетворяют уравнению каждой прямой, т. е. выполняются (при подстановке в уравнения прямых) равенства $y_0 = x_0 - 3$ и $y_0 = 2x_0 - 4$.

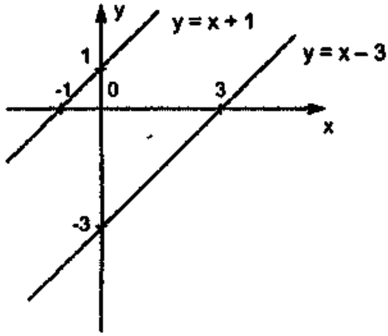


Поскольку в этих равенствах левые части одинаковы, можно приравнять и правые: $x_0 - 3 = 2x_0 - 4$. Из этого линейного уравнения находим абсциссу точки пересечения A $x_0 = 1$. Тогда из любого равенства можно найти и ординату точки пересечения, например $y_0 = x_0 - 3 = 1 - 3 = -2$. Итак, координаты точки пересечения $A(1; -2)$.

Таким образом, если **угловые коэффициенты** k прямых $y = kx + m$ **различны**, то эти прямые **пересекаются**.

Пример 2

Построим графики линейных функций $y = x - 3$ и $y = x + 1$.

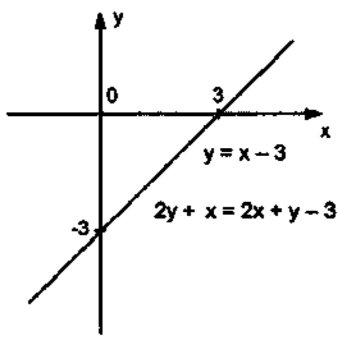


Из рисунка видно, что прямые, задаваемые этими функциями, параллельны.

Таким образом, если **угловые коэффициенты** k прямых $y = kx + m$ **одинаковы, а значения** m **различны**, то эти прямые **параллельны**.

Пример 3

Построим графики функций $y = x - 3$ и функции, задаваемой уравнением $2y + x = 2x + y - 3$. Прежде всего из уравнения $2y + x = 2x + y - 3$ найдем зависимость $y(x)$. Для этого в левую часть равенства перенесем члены, зависящие от y, а в правую часть – все остальные члены уравнения. Получаем: $2y - y = 2x - 3 - x$ или $y = x - 3$. Теперь видно, что графики двух данных функций совпадают.



Таким образом, если **угловые коэффициенты** k **и величины** m прямых $y = kx + m$ **одинаковы**, то эти прямые **совпадают**.

Обоснуем выводы, сделанные на основании рассмотренных примеров. Пусть даны две линейные функции $y = k_1x + m_1$ и $y = k_2x + m_2$. Предположим, что они пересекаются в точке с координатами $(x_0; y_0)$. Тогда эта точка лежит на каждой прямой и ее координаты удовлетворяют уравнению каждой прямой. Поэтому при подстановке значений x_0 и y_0 в уравнения прямых выполняются равенства: $y = k_1x_0 + m_1$ и $y = k_2x_0 + m_2$.

Так как в этих равенствах левые части одинаковы, то можно приравнять и правые: $k_1x_0 + m_1 + k_2x_0 + m_2$. Получили линейное уравнение для нахождения абсциссы x_0 точки пересечения. Запишем его в виде $k_1x_0 + k_2x_0 = m_2 - m_1$ или $(k_1 - k_2)x_0 = m_2 - m_1$. При решении этого уравнения возникают три случая:

1) если $k_1 - k_2 \neq 0$ (т. е. $k_1 \neq k_2$), то уравнение имеет единственное решение. Это означает, что прямые пересекаются (разумеется, в одной точке);

2) если $k_1 - k_2 = 0$ (т. е. $k_1 = k_2$) и $m_2 - m_1 \neq 0$ (т. е. $m_2 \neq m_1$), то уравнение решений не имеет. Это означает, что прямые не пересекаются, т. е. параллельны;

3) если $k_1 - k_2 = 0$ (т. е. $k_1 = k_2$) и $m_2 - m_1 = 0$ (т. е. $m_2 = m_1$), то уравнение имеет бесконечно много решений. Это означает, что прямые имеют бесконечно много общих точек, т. е. совпадают.

IV. Задание на уроках

№ 10.1; 10.4; 10.6; 10.8; 10.10; 10.14; 10.18; 10.22.

V. Контрольные вопросы

1. Каково взаимное расположение двух прямых на плоскости?
2. Условие пересечения графиков двух линейных функций.
3. При каком условии графики линейных функций параллельны?
4. Каково условие совпадения графиков линейных функций?

VI. Задание на дом

№ 10.2; 10.5; 10.7; 10.9; 10.11; 10.15; 10.19; 10.23.

VII. Творческие задания

1. При каких значениях параметров графики данных функций пересекаются?

а) $y = 2ax + 3$ и $y = 5x - 2$;

б) $y = (2a - 1)x$ и $y = (4a + 3)x + 2a$;

в) $y = 5ax - 4$ и $y = -ax + 3a$;

г) $y = (3a - 5)x + 6a$ и $y = (3a - 5)x$.

Ответы: а) $a \neq 2{,}5$; б) $a \neq -2$; в) $a \neq 0$; г) таких a нет.

2. При каких значениях параметров графики данных функций параллельны?

а) $y = 3ax + 5$ и $y = 6x - 2$;

б) $y = (3 - a)x + 1$ и $y = (a - 1)x + 5$;

в) $y = (a - 2)x + 2a$ и $y = (3 - 2a)x + a$;
г) $y = (a - 2)x + 6 - a$ и $y = (2a - 3)x + 2a + 3$;
д) $y = (2a - 5)x + 6a - 3$ и $y = (2a - 7)x + 3$.

Ответы: а) $a = 2$; б) $a = 2$; в) $a = \frac{5}{3}$; г) таких a нет; д) таких a нет.

3. При каких значениях параметров графики данных функций совпадают?

а) $y = 2ax + 7$ и $y = 4x + 7$;
б) $y = (5a - 3)x + 2a - 1$ и $y = 2ax + 5 - 4a$;
в) $y = (7 - 2a)x + 6a + 3$ и $y = (a + 1)x + 14 + a$;
г) $y = (5a - 3)x + 3a$ и $y = (5a + 1)x + 3a$.

Ответы: а) $a = 2$; б) $a = 1$; в) таких a нет; г) таких a нет.

VIII. Подведение итогов урока

Урок 21. Построение графиков более сложных функций (факультативное занятие)

Цель: получить навыки построения сложных графиков.

Ход урока

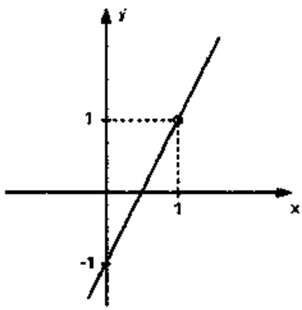
I. Сообщение темы и цели урока

II. Изучение нового материала

Навыки построения графиков линейных функций позволяют строить и графики более сложных зависимостей.

Пример 1

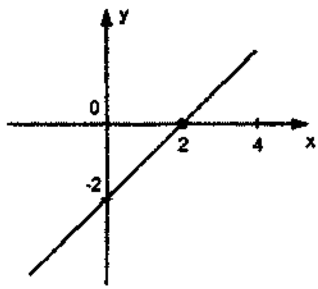
Построим график функции $\frac{y}{x-1} = \frac{2x-1}{x-1}$.



Отметим, что функция имеет смысл только при $x \neq 1$, т. к. делить на нуль нельзя. Поскольку дроби $\frac{y}{x-1}$ и $\frac{2x-1}{x-1}$ равны и имеют одинаковые знаменатели, то и числители этих дробей равны, т. е. $y = 2x - 1$. Построим график этой функции и учтем, что $x \neq 1$. Поэтому из графика удалим точку, для которой абсцисса $x = 1$ (пустой кружок означает отсутствие данной точки). Область определения этой функции – все числа, кроме $x = 1$; область значений – все числа, кроме $y = 1$.

Пример 2

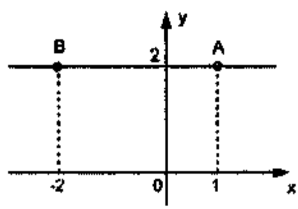
Построим график функции $\dfrac{y+x-2}{2x-4}=1$.



Учтем, что $2x - 4 \neq 0$ (т. е. $x \neq 2$). Умножим обе части данного равенства на выражение $2x - 4$ и получим: $y + x - 2 = 2x - 4$. Выразим из этого равенства $y = x - 2$. Построим график этой линейной функции и учтем, что $x \neq 2$ (удаленная точка обозначена пустым кружком). Область определения данной функции – все числа, кроме $x = 2$; область значений – все числа, кроме $y = 0$.

Пример 3

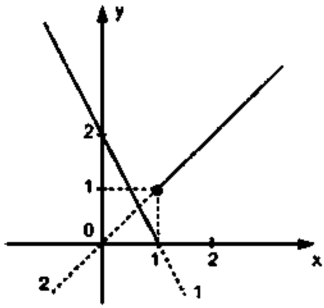
Построим график функции $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{y+x}{x+2}=1+\dfrac{1}{x-1}$.



Учтем, что $x - 1 \neq 0$ (т. е. $x \neq 1$) и $x + 2 \neq 0$ (т. е. $x \neq -2$). Из обеих частей равенства вычтем величину $\dfrac{1}{x-1}$ и получим: $\dfrac{y+x}{x+2}=1$. Умножим обе части этого равенства на величину $x + 2$ и получим: $y + x = x + 2$ или $y = 2$. Построим эту прямую, параллельную оси абсцисс. Из этой прямой удалим точку A (для которой $x = 1$) и точку B (для которой $x = -2$). Область определения этой функции – все числа, кроме $x = -2$ и $x = 1$; область значений – число $y = 2$.

Пример 4

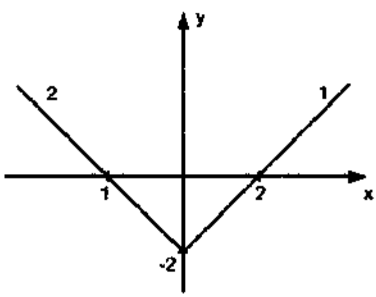
Построим график функции $\begin{cases} -2x + 2, \text{ если } x \le 1, \\ x, \text{ если } x > 1. \end{cases}$



Сначала построим график функции $y = -2x + 2$ (прямая 1) и выберем из него участок, для которого абсциссы $x \le 1$ (сплошная линия). Также построим график $y = x$ (прямая 2) и выберем из него часть, для которой абсциссы $x > 1$ (сплошная линия). Область определения данной функции – все числа x; область значений – неотрицательные числа y.

Пример 5

Построим график функции $y = |x| - 2$.



Используя определения модуля числа, запишем данную функцию в виде $\begin{cases} x - 2, \text{ если } x \ge 0, \\ -x - 2, \text{ если } x < 0. \end{cases}$ Аналогично предыдущему примеру для значений $x \ge 0$ построим график функции $y = x - 2$ (прямая 1), для значений $x < 0$ строим график функции $y = -x - 2$ (прямая 2). Область определения данной функции – все числа x, область значений - числа $y \ge -2$.

III. Задание на уроке и дома

Постройте графики функций; укажите области определения и значений; найдите точки пересечения графика с осями координат:

1) $3y+2x=y+x-1$;
2) $5y+2x=4y+3x+2$;
3) $\dfrac{y+x}{2x-3}=1$;
4) $\dfrac{y+2x}{x-1}=3$;
5) $\dfrac{y-3}{x+1}+\dfrac{5x-1}{x-2}=1+\dfrac{5x-1}{x-2}$;
6) $\dfrac{2x}{x-1}+\dfrac{y+2}{x-2}=2+\dfrac{2x}{x-1}$;
7) $\dfrac{x-1}{y+x}=1$;
8) $\dfrac{x+1}{y+x-1}=1$;
9) $\dfrac{3x-1}{y+x}=1$;
10) $\dfrac{3x+1}{y+x-1}=1$;
11) $y=\begin{cases}1, \text{ если } x\ge 2,\\ 2, \text{ если } x<2;\end{cases}$
12) $y=\begin{cases}-1, \text{ если } x<0,\\ 0, \text{ если } x=0,\\ 1, \text{ если } x>0;\end{cases}$
13) $y=\begin{cases}-x, \text{ если } x<1,\\ x-2, \text{ если } x\ge 1;\end{cases}$
14) $y=\begin{cases}2x, \text{ если } x\le 1,\\ x-3, \text{ если } x>1;\end{cases}$
15) $y=|x|$;
16) $y=1-|x|$;
17) $y=|x|+x$;
18) $y=|x|-x$;
19) $y=|x|+2x-1$;
20) $y=3x-|x|+1$;
21) $y=\dfrac{|x-1|}{x-1}$;
22) $y=\dfrac{3-x}{|3-x|}$;
23) $y=\dfrac{x}{|x|}-\dfrac{|x|}{x}+2$;
24) $y=\dfrac{|x|}{x}-\dfrac{x}{|x|}-1$.

IV. Подведение итогов урока

Урок 22. Понятие о графике уравнения (факультативное занятие)

Цели: дать простейшие представления учащимся о графиках уравнений; научить строить графики.

Ход урока

I. Сообщение темы и целей урока

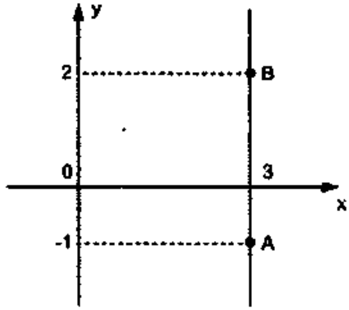
II. Изучение нового материала

До сих пор мы рассматривали только **функциональные** зависимости (**функции**). В таких зависимостях **каждому** значению переменной x соответствовало только **одно значение** переменной y. В математике встречаются и такие зависимости между переменными x и y, при которых **одному** значению x может соответствовать **более одного** значения y. Множество точек (x, y), связанных такой зависимостью, можно изобразить на координатной плоскости. В этом случае говорят о **графике уравнения.**

Пример 1

На координатной плоскости изобразите множество таких точек $(x; y)$, которые удовлетворяют уравнению $x = 3$.

Видно, что в уравнение $x = 3$ переменная y не входит. Поэтому любое значение y будет удовлетворять данному уравнению. Возьмем, например, точки A (3; −1) и B (3; 2). Координаты этих точек удовлетворяют уравнению. Поэтому такие точки принадлежат искомому графику. Через точки A и B проведем прямую линию. Эта прямая параллельна оси ординат и является графиком уравнения $x = 3$.



Заметим, что раньше мы строили графики функций $y = a$ (где a – некоторое число) и получали прямые параллельные оси абсцисс. Поэтому построенный график аналогичен рассмотренным раньше.

Отметим, что построенный график является именно графиком уравнения (а не функции), т. к. одному значению переменной x соответствуют бесконечно много значений переменной y.

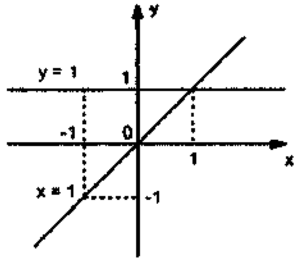
Пример 2

На координатной плоскости изобразить множество таких точек $(x; y)$, которые удовлетворяют уравнению $(y - 1)(y - x) = 0$.

Сначала из данного уравнения найдем величину y. Если произведение двух множителей равно нулю, то либо первый множитель равен нулю, либо второй множитель равен нулю. Поэтому рассмотрим два случая:

а) $y - 1 = 0$, отсюда $y = 1$. Построим эту прямую, параллельную оси абсцисс;

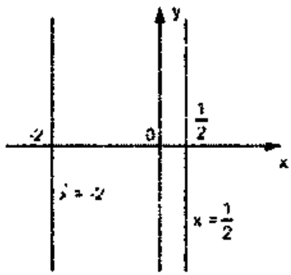
б) $y - x = 0$, тогда $y = x$. Построим график этой прямой пропорциональной зависимости (биссектриса первого и третьего координатных углов).



Две пересекающиеся прямые $y = 1$ и $y = x$ и являются графиком данного уравнения. Разумеется, построенный график является именно **графиком уравнения**, а не графиком функции. Например, как видно из рисунка, одному значению $x = -1$ соответствуют два различных значения y: $y = -1$ и $y = 1$.

Пример 3

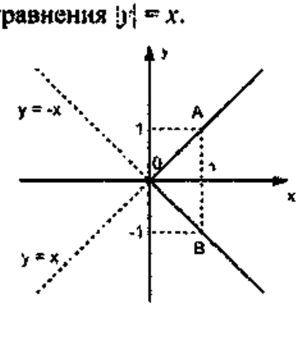
Построим график уравнения $(2x - 1)(2x + 4) = 0$.



Так как произведение двух множителей равно нулю, то один из множителей должен равняться нулю. Получаем $2x - 1 = 0$ (откуда $x = \frac{1}{2}$) и $2x + 4 = 0$ (тогда $x = -2$). Построим две прямые $x = \frac{1}{2}$ и $x = -2$, параллельные оси ординат, и получим график данного уравнения.

Пример 4

Построим график уравнения $|y| = x$.



Для этого раскроем в уравнении модуль, рассмотрев два случая.

Если $y \geq 0$, то уравнение имеет вид $y = x$. Построим прямо пропорциональную зависимость $y = x$ и выберем такие точки на этой прямой, для которых $y \geq 0$ (сплошная прямая).

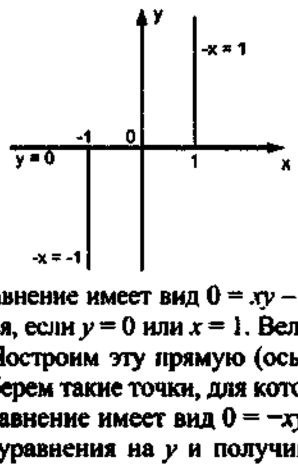
Если $y < 0$, то уравнение имеет вид $-y = x$ или $y = -x$. Построим график этой зависимости, выберем на этой прямой такие точки, для которых ордината $y < 0$ (сплошная прямая).

Таким образом, графиком данного уравнения будет ломаная AOB.

Пример 5

Построим график уравнения $y = x|y|$.

Сначала найдем более простую связь между переменными y и x. Запишем уравнение в виде $0 = x|y| - y$ и раскроем знак модуля, рассмотрев два случая.



а) Если $y \geq 0$, то уравнение имеет вид $0 = xy - y$ или $0 = y(x - 1)$. Это уравнение выполняется, если $y = 0$ или $x = 1$. Величина $y = 0$ удовлетворяет условию $y \geq 0$. Построим эту прямую (ось абсцисс). Из графика зависимости $x = 1$ выберем такие точки, для которых ордината $y \geq 0$.

б) Если $y < 0$, то уравнение имеет вид $0 = -xy - y$. Так как $y \neq 0$, то разделим все члены уравнения на y и получим: $0 = -x - 1$, откуда $x = -1$. Построим эту прямую $x = -1$ и из графика выберем такие точки, для которых ордината $y < 0$.

Таким образом, график данного уравнения состоит из оси абсцисс ($y = 0$) и двух лучей $x = 1$ и $x = -1$.

Заметим, что при рассмотрении уравнения и его графика **понятия области определения и области значений не вводятся** (в отличие от функции). Отметим, что в старших классах будет продолжено рассмотрение графиков уравнений, а также будут рассмотрены графики неравенств.

III. Задание для учащихся на уроке и на дом

Постройте на координатной плоскости множество точек $(x; y)$, для которых выполнены равенства:

1) $x = 3$; 2) $x = -2$;

3) $(2x - 5)(x + 1) = 0$; 4) $(3x - 2)(x + 2) = 0$;

5) $(y + 2x)(y + 1) = 0$;
6) $(y + x - 1)(y - 2) = 0$;
7) $(y - x + 2)(x + y - 1) = 0$;
8) $(y + 3x - 1)(x + 2y + 3) = 0$;
9) $|x - 3| = 1$;
10) $|x + 2| = 3$;
11) $|y - 1| = x$;
12) $|y - 2| = 2x$;
13) $|x - y + 2| = 1$;
14) $|2x + y - 4| = 3$;
15) $|x - 2y| = |5x + y|$;
16) $|2x - 3y| = |x + 2y - 4|$;
17) $|x| + |y| = 24$
18) $|x| + 2|y| = 3$;
19) $3|x| + |y| = 4$;
20) $|x - 1| + |y| = 2$;
21) $|x| + |y - 1| = 2$;
22) $|x| - |y| = 2$;
23) $|x| + |y| = x + y$;
24) $|x| + |y| = x - y$;
25) $|x - 1| + |x - 3| = 24$;
26) $|x - 3| + |x - 7| = 4$;
27) $|y - 3| = 1$;
28) $2\,|3 - 2y| = 5$;
29) $|y + 1| + |y - 2| = 3$;
30) $|y + 2| + |y - 1| = 3$.

IV. Подведение итогов урока

Уроки 23–24. Контрольная работа № 2 по теме «Линейная функция»

Контрольная работа составлена в шести вариантах различной сложности (варианты 1, 2 – самые простые, варианты 3, 4 – средней сложности, варианты 5, 6 – самые сложные). Степень сложности меняется не слишком резко. Поэтому можно рекомендовать следующие критерии оценки: при решении вариантов 1, 2 оценка «3» ставится за любые три решенные задачи, оценка «4» – за четыре задачи и оценка «5» – за пять задач. Одна задача дает школьникам некоторую свободу выбора. При тех же критериях оценки за решение вариантов 3, 4 добавляется к набранным баллам дополнительно 0,5 балла; за решение вариантов 5, 6 – дополнительно 1,0 балл (т. е. оценка «5» ставится уже за 4 задачи). Все задачи в варианте примерно равноценны. Могут быть несколько тяжелее задачи 5 и 6.

Перед проведением контрольной работы целесообразно ознакомить учащихся с критериями оценки и разной сложностью вариантов. Выбор вариантов может быть осуществлен учителем или предоставлен самим учащимся (в этом случае предполагается наличие копировальной техники в школе и избыточное количество заданий работы). При наличии такой техники в классе на стенде (после урока - разбора контрольной) может быть вывешено решение всех задач шести вариантов. Разумеется, разобрать такое количество задач на уроке невозможно (да и не нужно).

Вариант 1

1. Функция задана формулой $y = 2x + 3$. Принадлежат ли графику функции точки $A(1; 5)$ и $B(-1; -1)$?

2. Постройте график функции $y = -4x + 3$ и укажите координаты точек пересечения графика с осями координат.

3. Постройте график зависимости $y = kx$, если он проходит через точку $A(-2; 4)$. Найдите угловой коэффициент k.

4. При каком значении параметра a графики функций $y = 3x - 2$ и $y = 7 + (a - 2)x$ параллельны?

5. Найдите точку пересечения графиков функций $y = 3$ и $y = 2x - 1$.

6. Постройте график уравнения $|x + 1| = 2$.

Вариант 2

1. Функция задана формулой $y = -2x + 5$. Принадлежат ли графику функции точки $A(1; 3)$ и $B(-1; 6)$?

2. Постройте график функции $y = 3x + 4$ и укажите координаты точек пересечения графика с осями координат.

3. Постройте график зависимости $y = kx$, если он проходит через точку $A(2; -6)$. Найдите угловой коэффициент k.

4. При каком значении параметра a графики функций $y = 5x + 3$ и $y = -4 + (a + 3)x$ параллельны?

5. Найдите точку пересечения графиков функций $y = -1$ и $y = 3x + 2$.

6. Постройте график уравнения $|x - 2| = 1$.

Вариант 3

1. Функция задана формулой $y = 2x^2 + |x| + 1$. Принадлежат ли графику функции точки $A(1; 4)$ и $B(-1; 5)$? Найдите точку пересечения графика с осью ординат.

2. Постройте график функции $y = |x| - 1$ и укажите координаты точек пересечения графика с осями координат.

3. Постройте график функции $\dfrac{y+1}{x-1} = \dfrac{5-2x}{x-1}$.

4. При каком значении параметра a графики функций $y = 6x - 3$ и $y = 2a - 1 - (2a - 4)x$ параллельны?

5. Найдите точку пересечения графиков функций $y = -2x$ и $y = 2x - 4$. Постройте эти графики.

6. Постройте график уравнения $|x| + 2|y| = 2$.

Вариант 4

1. Функция задана формулой $y = 2|x| - x^2 + 3$. Принадлежат ли графику функции точки $A(1; 4)$ и $B(-1; 3)$? Найдите точку пересечения графика с осью ординат.

2. Постройте график функции $y = 1 - |x|$ и укажите координаты точек пересечения графика с осями координат.

3. Постройте график функции $\frac{y-1}{x+1}=\frac{3+2x}{x+1}$.

4. При каком значении параметра a графики функций $y = 4x + 5$ и $y = 1 - 2a - (3a + 2)x$ параллельны?

5. Найдите точку пересечения графиков функций $y = 2x$ и $y = 6 - x$. Постройте эти графики.

6. Постройте график уравнения $2|x| + |y| = 2$.

Вариант 5

1. График линейной функции $y = kx + b$ проходит через точки $A(0; -3)$ и $B(2; 0)$. Постройте график функции и определите функцию (найдите k и b).

2. Укажите координаты точек пересечения графика функции $y = 2x^2 + 3x$ с осями координат.

3. Найдите координаты точки графика функции $y = 3x - 7$, если эти координаты равны. Постройте график и укажите найденную точку.

4. Постройте график уравнения $|y - 2x + 1| = 2$.

5. Найдите точку пересечения графиков функций $y = 7x - 31$ и $y = 2x - 6$.

6. Постройте график уравнения $|x + 1| + |x - 1| = 2$.

Вариант 6

1. График линейной функции $y = kx + b$ проходит через точки $A(0; 2)$ и $B(-3; 0)$. Постройте график функции и определите функцию (найдите k и b).

2. Укажите координаты точек пересечения графика функции $y = 3x^2 + 2x$ с осями координат.

3. Найдите координаты точки графика функции $y = -3x + 5$, если эти координаты равны. Постройте график и укажите найденную точку.

4. Постройте график уравнения $|y + 2x - 2| = 1$.

5. Найдите точку пересечения графиков функций $y = 9x - 43$ и $y = 3x - 7$.

6. Постройте график уравнения $|y - 1| + |y + 1| = 2$.

Урок 25. Анализ контрольной работы

I. Итоги работы

1. Распределение работ по вариантам и результаты решения.

Данные о результатах работы удобно заносить в таблицу (для каждой пары вариантов).

Итоги \ № задачи	1	2	3	…	6
+	5				
±	1				
—	1				
Ø	1				

Обозначения:

\+ – число решивших задачу правильно или почти правильно;

± – число решивших задачу со значительными погрешностями;

— – число не решивших задачу;

Ø – число не решавших задачу.

2. Типичные ошибки при решении задач.

3. Задачи, вызвавшие наибольшие трудности, и их разбор (учителем или школьниками, сделавшими эту задачу).

II. Ответы и решения

Ответы

Вариант 1

1. *Ответ*: A принадлежит, B не принадлежит.
2. *Ответ*: $A(0; 3)$, $B(\frac{3}{4}; 0)$.
3. *Ответ*: $k = -2$.
4. *Ответ*: $a = 5$.
5. *Ответ*: $A(2; 3)$.
6. *Ответ*: прямые $x = 1$ и $x = -3$.

Вариант 2

1. *Ответ*: A принадлежит, B не принадлежит.
2. $A(0; 4)$, $B(-\frac{4}{3}; 0)$.
3. *Ответ*: $k = -3$.
4. *Ответ*: $a = 2$.
5. *Ответ*: $A(-1; -1)$.
6. *Ответ*: прямые $x = 1$ и $x = 3$.

Вариант 3

1. *Ответ*: A принадлежит, B не принадлежит, $C(0; 1)$.
2. *Ответ*: $A(-1; 0)$, $B(1; 0)$, $C(0; -1)$.
3. *Ответ*: $y = 4 - 2x$, $x \neq 1$.
4. *Ответ*: таких a нет.
5. *Ответ*: $A(1; -2)$.
6. *Ответ*: график симметричен относительно осей координат.

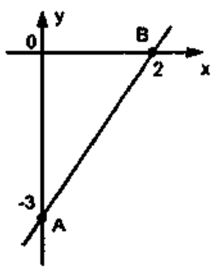
Вариант 4

1. *Ответ*: A принадлежит, B не принадлежит, $C(0; 3)$.
2. *Ответ*: $A(-1; 0)$, $B(1; 0)$, $C(0; 1)$.
3. *Ответ*: $y = 2x + 4$, $x \neq -1$.
4. *Ответ*: таких a нет.
5. *Ответ*: $A(2; 4)$.
6. *Ответ*: график симметричен относительно осей координат.

Решения

Вариант 5

1. Даны точки $A(0; -3)$ и $B(2; 0)$ – точки пересечения графика линейной функции $y = kx + b$ с осями координат. Построим эти точки и проведем через них прямую. Так как прямая проходит через точку A, то подставим ее координаты в функцию и получим: $-3 = k \cdot 0 + b$, откуда $b = -3$. Тогда функция имеет вид $y = kx - 3$. Подставим координаты точки B в функцию $0 = k \cdot 2 - 3$, откуда $k = \frac{3}{2} = 1{,}5$. Значит, функция имеет вид $y = 1{,}5x - 3$.



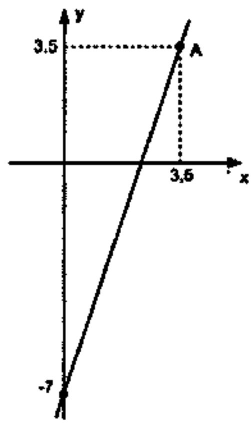
Ответ: $y = 1{,}5x - 3$.

2. Найдем координаты точек пересечения графика функции $y = 2x^2 + 3x$ с осями координат. Для нахождения точек пересечения с осью абсцисс положим $y = 0$ и получим уравнение $0 = 2x^2 + 3x$. Используя распределительное свойство, запишем уравнение в виде $0 = x(2x + 3)$. Так как произведение множителей равно нулю, то один из них равен нулю. Получаем: $x = 0$ и $2x + 3 = 0$, откуда $x = -\frac{3}{2}$.

Итак, точки пересечения с осью абсцисс $A(0; 0)$ и $B(-\frac{3}{2}; 0)$. Так как точка A – начало координат, то эта точка одновременно и точка пересечения графика функции с осью ординат.

Ответ: $A(0; 0)$ и $B(-\frac{3}{2}; 0)$.

3. На графике функции $y = 3x - 7$ есть точка A, координаты которой равны, т. е. $x = a$ и $y = a$. Эти координаты должны удовлетворять уравнению функции. Подставив их, получаем: $a = 3a - 7$, откуда $a = 3{,}5$. Итак, точка имеет координаты $A(3{,}5; 3{,}5)$. Построим график функции $y = 3x - 7$ и отметим на нем точку A.



Ответ: $A(3{,}5; 3{,}5)$.

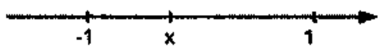
4. Построим график уравнения $|y - 2x + 1| = 2$. Если модуль некоторой величины равен 2, то сама величина может равняться 2 или -2. Рассмотрим эти случаи. Если $y - 2x + 1 = 2$, то $y = 2x + 1$. Если $y - 2x + 1 = -2$, то $y = 2x - 3$. Построим две параллельные прямые $y = 2x + 1$ и $y = 2x - 3$, которые являются графиком данного уравнения.

5. Пусть $A(x_0; y_0)$ – точка пересечения графиков функций $y = 7x - 31$ и $y = 2x - 6$. Так как точка A принадлежит графику каждой функции, то ее координаты удовлетворяют каждой функции, т. е. выполняются равенства $y_0 = 7x_0 - 31$ и $y_0 = 2x_0 - 6$. В этих равенствах одинаковые

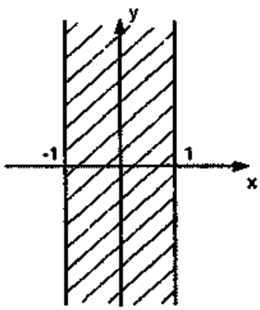
левые части. Поэтому приравняем правые части. Получаем уравнение $7x_0 - 31 = 2x_0 - 6$ для нахождения абсциссы точки пересечения. Запишем уравнение в виде $7x_0 - 2x_0 = 31 - 6$ или $5x_0 = 25$ и найдем $x_0 = 5$. Теперь из любого уравнения, например из первого, определяем: $y_0 = 7x_0 - 31 = 7 \cdot 5 - 31 = 4$. Итак, координаты точки $A(5; 4)$.

Ответ: $A(5; 4)$.

6. Для построения графика уравнения $|x + 1| + |x - 1| = 2$ учтем геометрический смысл модуля. Величина $|x + 1| = |x - (-1)|$ – расстояние от точки x до точки -1 на координатной оси; величина $|x - 1|$ – расстояние от точки x до точки 1. Тогда геометрический смысл выражения $|x + 1| + |x - 1|$ – сумма расстояний от точки x до точек -1 и 1.

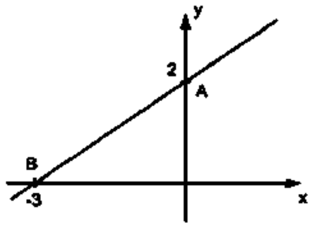


Из рисунка видно, что сумма таких расстояний будет равна 2, если точка x располагается между точками -1 и 1 на координатной оси, т. е. $-1 \le x \le 1$. Теперь на координатной плоскости построим множество таких точек. Сначала строим две параллельные прямые $x = -1$ и $x = 1$ (границы области). При этом координата y может быть любой. Тогда условию $-1 \le x \le 1$ удовлетворяют все точки плоскости, расположенные между построенными прямыми $x = -1$ и $x = 1$ и на них (эти точки заштрихованы).



Вариант 6

1. Даны точки $A(0; 2)$ и $B(-3; 0)$ – точки пересечения графика линейной функции $y = kx + b$ с осями координат. Построим эти точки и проведем через них прямую. Так как прямая проходит через точку A, то подставим ее координаты в функцию и получим: $2 = k \cdot 0 + b$, откуда $b = 2$. Тогда функция имеет вид $y = kx + 2$. Подставим координаты точки B в функцию $0 = k \cdot (-3) + 2$, откуда $k = \frac{2}{3}$. Значит, функция имеет вид $y = \frac{2}{3}x + 2$.



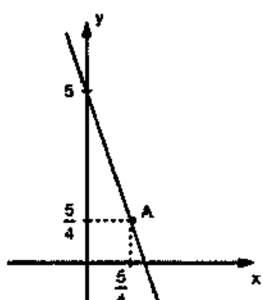
Ответ: $y=\frac{2}{3}x+2$.

2. Найдем координаты точек пересечения графика функции $y=3x^2+2x$ с осями координат. Для нахождения точек пересечения с осью абсцисс положим $y = 0$ и получим уравнение $0=3x^2+2x$. Используя распределительное свойство, запишем уравнение в виде $0=x(3x+2)$. Так как произведение множителей равно нулю, то один из них равен нулю. Получаем: $x = 0$ и $3x + 2 = 0$, откуда $x=-\frac{2}{3}$.

Итак, точки пересечения с осью абсцисс $A(0; 0)$ и $B(-\frac{2}{3}; 0)$. Так как точка A – начало координат, то эта точка одновременно и точка пересечения графика функции с осью ординат.

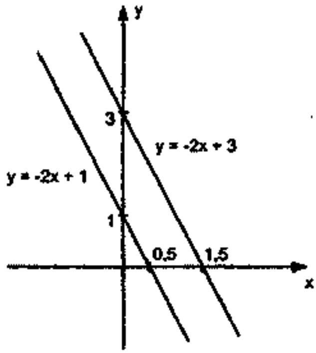
Ответ: $A(0; 0)$ и $B(-\frac{2}{3}; 0)$.

3. На графике функции $y = -3x + 5$ есть точка A, координаты которой равны, т. е. $x = a$ и $y = a$. Эти координаты должны удовлетворять уравнению функции. Подставив их, получаем: $a = -3a + 5$, откуда $a=\frac{5}{4}$. Итак, точка имеет координаты $A\left(\frac{5}{4};\frac{5}{4}\right)$. Построим график функции $y = -3x + 5$ и отметим на нем точку A.



Ответ: $A\left(\frac{5}{4};\frac{5}{4}\right)$.

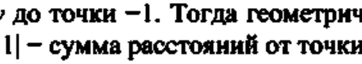
4. Построим график уравнения $|y + 2x - 2| = 1$. Если модуль некоторой величины равен 1, то сама величина может равняться 1 или -1. Рассмотрим эти случаи. Если $y + 2x - 2 = 1$, то $y = -2x + 3$. Если $y + 2x - 2 = -1$, то $y = -2x + 1$. Построим две параллельные прямые $y = -2x + 3$ и $y = -2x + 1$, которые являются графиком данного уравнения.



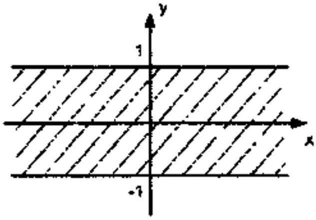
5. Пусть $A(x_0; y_0)$ – точка пересечения графиков функций $y = 9x - 43$ и $y = 3x - 7$. Так как точка A принадлежит графику каждой функции, то ее координаты удовлетворяют каждой функции, т. е. выполняются равенства $y_0 = 9x_0 - 43$ и $y_0 = 3x_0 - 7$. В этих равенствах одинаковые левые части. Поэтому приравняем правые части. Получаем уравнение $9x_0 - 43 = 3x_0 - 7$ для нахождения абсциссы точки пересечения. Запишем уравнение в виде $9x_0 - 3x_0 = 43 - 7$ или $6x_0 = 36$ и найдем $x_0 = 6$. Теперь из любого уравнения, например из первого, определяем $y_0 = 9x_0 - 43 = 9 \cdot 6 - 43 = 11$. Итак, координаты точки $A(6; 11)$.

Ответ: $A(6; 11)$.

6. Для построения графика уравнения $|y - 1| + |y + 1| = 2$ учтем геометрический смысл модуля. Величина $|y - 1|$ – расстояние от точки y до точки 1 на координатной оси; величина $|y + 1| = |y - (-1)|$ – расстояние от точки y до точки -1. Тогда геометрический смысл выражения $|y - 1| + |y + 1|$ – сумма расстояний от точки y до точек 1 и -1.



Из рисунка видно, что сумма таких расстояний будет равна 2, если точка y располагается между точками -1 и 1 на координатной оси, т. е. $-1 \le y \le 1$. Теперь на координатной плоскости построим множество таких точек. Сначала строим две параллельные прямые $y = -1$ и $y = 1$ (границы области). При этом координата x может быть любой. Тогда условию $-1 \le y \le 1$ удовлетворяют все точки плоскости, расположенные между построенными прямыми $y = -1$ и $y = 1$ и на них (эти точки заштрихованы).



Уроки 26–27. Зачет по теме «Линейная функция»

Цели: сравнение успеваемости учащихся при одинаковой сложности заданий, возможность повышения оценки за выполненные контрольные работы.

Ход уроков

I. Сообщение темы и целей уроков

II. Характеристика зачетной работы

Работа составлена в двух равноценных вариантах. По сравнению с контрольной работой увеличено количество заданий. Соответственно у учащихся возрастает возможность выбора задач. Все задания разбиты на три блока: А, В и С. Самые простые задачи находятся в блоке А, более сложные – в блоке В, еще сложнее – в блоке С. Каждая задача из блока А оценивается в 1 балл, из блока В – в 2 балла, из блока С – в 3 балла. Поэтому за правильное решение всех задач блока А можно получить 7 баллов, блока В – 8 баллов и блока С – 9 баллов (всего 24 балла). Оценка «3» ставится за 6 баллов, оценка «4» – за 10 баллов, оценка «5» – за 14 баллов.

Так как эта работа является зачетной, то в нее не включены принципиально новые задачи. Поэтому разбору заданий работы занятия можно и не посвящать (решения задач могут быть вывешены на стенде). Для стендового размещения разбор вариантов приводится.

Вариант 1

А

1. Дана функция $y = 2x - 3$. Найдите:

а) значение функции при $x = -1$;

б) значение аргумента, при котором значение функции $y = -7$.

2. Определите точки пересечения графика функции $y = -3x + 5$ с осями координат.

3. Принадлежат ли графику функции $y = 3x - |x| + 1$ точки:

а) $A(-1; -3)$;
б) $B(2; 4)$?

4. Постройте график функции $\frac{y}{x} = \frac{-2x-2}{x}$.

5. Постройте график функции $y = kx$ и определите угловой коэффициент k, если график проходит через точку $A(-6; -3)$.

6. Поезд первоначально находится на расстоянии 30 км от города и удаляется от него со скоростью 40 км/ч. Задайте формулой расстояние s от города до поезда в зависимости от времени движения t.

7. График функции параллелен прямой $y = 3x - 7$ и проходит через точку $A(2; 1)$. Задайте формулой эту функцию.

B

8. Определите точки пересечения графика функции $y = \frac{2x-4}{x^2+1}$ с осями координат.

9. Найдите точку пересечения графиков функций $y = 5x - 3$ и $y = 7x - 19$.

10. Постройте график функции $y = \begin{cases} x-3, \text{ если } x \le 1, \\ -2x, \text{ если } x > 1. \end{cases}$

11. Постройте график уравнения $|2x-4| + |y-3| = 0$.

C

12. Графики функций $y = (2a-3)x + a - 7$ и $y = (4a-1)x + 5 - 3a$ параллельны. Найдите значение параметра a и формулу каждой функции.

13. Постройте график функции $y = |x| + \frac{|x|}{x}$.

14. Постройте график уравнения $|y - x| + x = 2$.

Вариант 2

A

1. Дана функция $y = 3x - 4$. Найдите:

а) значение функции при $x = -1$;
б) значение аргумента, при котором значение функции $y = -10$.

2. Определите точки пересечения графика функции $y = -2x + 7$ с осями координат.

3. Принадлежат ли графику функции $y = 4x - |x| + 2$ точки:

а) $A(-1; -3)$;
б) $B(2; 6)$?

4. Постройте график функции $\frac{y}{x} = \frac{-3x-1}{x}$.

5. Постройте график функции $y = kx$ и определите угловой коэффициент k, если график проходит через точку $A(-3; -6)$.

6. Поезд первоначально находится на расстоянии 40 км от города и удаляется от него со скоростью 30 км/ч. Задайте формулой расстояние s от города до поезда в зависимости от времени движения t.

7. График функции параллелен прямой $y = 2x - 6$ и проходит через точку $A(3; 2)$. Задайте формулой эту функцию.

B

8. Определите точки пересечения графика функции $y = \frac{3x-6}{x^2+2}$ с осями координат.

9. Найдите точку пересечения графиков функций $y = 3x - 14$ и $y = 5x - 6$.

10. Постройте график функции $y = \begin{cases} x+1, \text{ если } x \le 1, \\ 2x, \text{ если } x > 1. \end{cases}$

11. Постройте график уравнения $|4 - 2x| + |y - 1| = 0$.

C

12. Графики функций $y = (3a+2)x + 2a - 1$ и $y = (a-2)x + 3 - 4a$ параллельны. Найдите значение параметра a и формулу каждой функции.

13. Постройте график функции $y = |x| - \frac{x}{|x|}$.

14. Постройте график уравнения $|y + x| - x = 3$.

III. Ответы и решения

Вариант 1

1. *Ответ*: а) $y = -5$; б) $x = -2$.

2. *Ответ*: $A(0; 5)$, $B(\frac{5}{3}; 0)$.

3. *Ответ*: A принадлежит. B не принадлежит.

4. *Ответ*: график $y = -2x - 2$, $x \neq 0$.

5. *Ответ*: $k = \frac{1}{2}$.

6. *Ответ*: $s = 30 + 40t$ (км).

7. *Ответ*: $y = 3x - 5$.

8. *Ответ*: $A(0; -4)$. $B(2; 0)$.

9. *Ответ*: $A(8; 37)$.

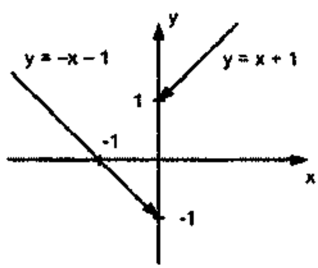
10. *Ответ*: $y = x - 3$ при $x \geq 1$ и $y = -2x$ при $x < 1$.

11. *Ответ*: $A(2; 3)$.

12. Графики линейных функций $y = kx + b$ параллельны, если выполнены условия: $k_1 = k_2$ и $b_1 \neq b_2$. Для данных функций $y=(2a-3)x+a-7$ и $y=(4a-1)x+5-3a$ получаем условия: $2a-3=4a-1$ и $a-7\neq 5-3a$. Решим уравнение $2a-3=4a-1$. Получаем: $-2 = 2a$, откуда $a = -1$. Проверим, что выполняется неравенство $a-7\neq 5-3a$. Подставим значение $a = -1$ в левую и правую части и получим верное неравенство $-1 - 7 \neq 5 - 3\cdot(-1)$ или $-8 \neq 8$. Теперь подставим $a = -1$ в данные функции и определим их: $y = (2\cdot(-1) - 3)x + (-1) - 7$ и $y = (4\cdot(-1) - 1)x + 5 - 3\cdot(-1)$ или $y = -5x - 8$ и $y = -5x + 8$.

Ответ: $a = -1$, $y = -5x - 8$, $y = -5x + 8$.

13. Построим график функции $y=|x|+\frac{|x|}{x}$. Учтем, что $x \neq 0$, и раскроем знак модуля. Если $x < 0$, то $|x| = -x$ и функция имеет вид $y=-x+\frac{-x}{x}$ или $y = -x - 1$.

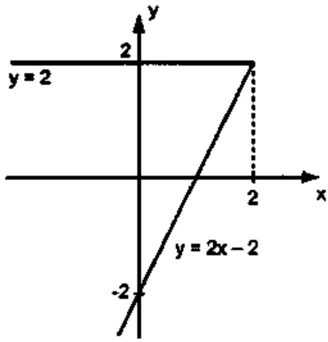


Построим график этой функции при $x < 0$. Если $x > 0$, то $|x| = x$ и функция имеет вид $y=x+\frac{x}{x}$ или $y = x + 1$.

Построим график этой функции при $x > 0$. Стрелками показано, что при $x = 0$ функция не определена (не имеет смысла).

14. Для построения графика уравнения $|y-x|+x=2$ раскроем знак модуля, рассмотрев два случая.

а) Если $y - x < 0$, то $|y-x|=-(y-x)=x-y$ и уравнение имеет вид $x - y + x = 2$, откуда $y = 2x - 2$. Подставим эту величину y в неравенство $y - x < 0$ и получим: $2x - 2 - x < 0$ или $x - 2 < 0$. Это неравенство выполняется при $x < 2$.



Построим график функции $y = 2x - 2$ при $x < 2$.

б) Если $y - x \geq 0$, то $|y - x| = y - x$ и уравнение имеет вид $y - x + x = 2$, откуда $y = 2$. Подставим эту величину y в неравенство $y - x \geq 0$ и получим $2 - x \geq 0$. Это неравенство выполняется при $x \leq 2$. Построим график функции $y = 2$ при $x \leq 2$.

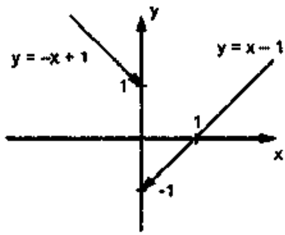
В результате рассмотрения двух случаев получаем график данного уравнения.

Вариант 2

1. *Ответ*: а) $y = -7$; б) $x = -2$.
2. *Ответ*: $A(0; 7)$, $B(3{,}5; 0)$.
3. *Ответ*: A принадлежит, B не принадлежит.
4. *Ответ*: график $y = -3x - 1$, $x \neq 0$.
5. *Ответ*: $k = 2$.
6. *Ответ*: $s = 40 + 30t$ (км).
7. *Ответ*: $y = 2x - 4$.
8. *Ответ*: $A(0; -3)$, $B(2; 0)$.
9. *Ответ*: $A(-4; -26)$.
10. *Ответ*: $y = x + 1$ при $x \leq 1$ и $y = 2x$ при $x > 1$.
11. *Ответ*: $A(2; 1)$.
12. Графики линейных функций $y = kx + b$ параллельны, если выполнены условия: $k_1 = k_2$ и $b_1 \neq b_2$. Для данных функций $y = (3a+2)x + 2a - 1$ и $y = (a-2)x + 3 - 4a$ получаем условия: $3a + 2 = a - 2$ и $2a - 1 \neq 3 - 4a$. Решим уравнение $3a + 2 = a - 2$. Получаем: $2a = -4$, откуда $a = -2$. Проверим, что выполняется неравенство $2a - 1 \neq 3 - 4a$. Подставим значение $a = -2$ в левую и правую части и получим верное неравенство $2\cdot(-2) - 1 \neq 3 - 4\cdot(-2)$ или $-5 \neq 11$. Теперь подставим $a = -2$ в данные функции и определим их: $y = (3\cdot(-2) + 2)x + 2(-2) - 1$ и $y = (-2 - 2)x + 3 - 4\cdot(-2)$ или $y = -4x - 5$ и $y = -4x + 11$.

Ответ: $a = -2$, $y = -4x - 5$, $y = -4x + 11$.

13. Построим график функции $y=|x|-\frac{x}{|x|}$. Учтем, что $x \neq 0$, и раскроем знак модуля. Если $x < 0$, то $|x| = -x$ и функция имеет вид $y=-x-\frac{x}{-x}$ или $y = -x + 1$.

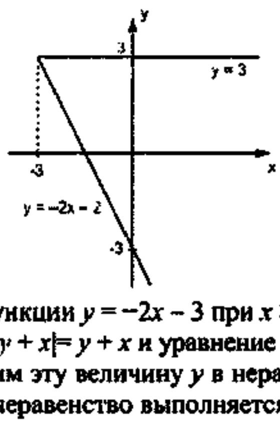


Построим график этой функции при $x < 0$. Если $x > 0$, то $|x| = x$ и функция имеет вид $y=x-\frac{x}{x}$ или $y = x - 1$.

Построим график этой функции при $x > 0$. Стрелками показано, что при $x = 0$ функция не определена (не имеет смысла).

14. Для построения графика уравнения $|y+x|-x=3$ раскроем знак модуля, рассмотрев два случая.

а) Если $y + x < 0$, то $|y+x|=-(y+x)=-y-x$ и уравнение имеет вид $-y - x - x = 3$, откуда $y = -2x - 3$. Подставим эту величину y в неравенство $y + x < 0$ и получим: $-2x - 3 + x < 0$ или $-x - 3 < 0$. Это неравенство выполняется при $x > -3$.



Построим график функции $y = -2x - 3$ при $x > -3$.

б) Если $y + x \geq 0$, то $|y + x|= y + x$ и уравнение имеет вид $y + x - x = 3$, откуда $y = 3$. Подставим эту величину y в неравенство $y + x \geq 0$ и получим: $3 + x \geq 0$. Это неравенство выполняется при $x \geq -3$. Построим график функции $y = 3$ при $x \geq -3$.

В результате рассмотрения двух случаев получаем график данного уравнения.

Глава 3. Системы двух линейных уравнений с двумя переменными

§ 11. Основные понятия

Уроки 28–29. Системы двух линейных уравнений

Цель: дать понятие о системе двух линейных уравнений и ее решении.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Изучение нового материала

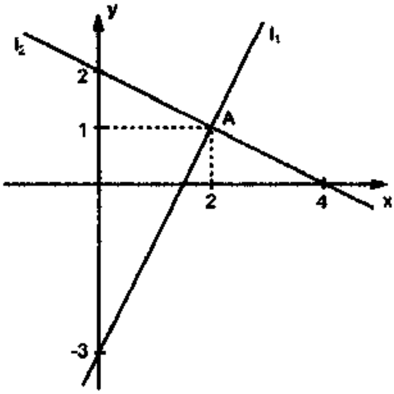
В предыдущей главе было введено понятие **линейного уравнения с двумя переменными**, т. е. равенство $ax + by + c = 0$ (где a, b, c – некоторые коэффициенты ($a \neq 0$, $b \neq 0$), x, y – переменные (неизвестные)). При этом пара чисел (x; y), которая обращает данное равенство в верное числовое равенство, называется **решением уравнения**. **Графиком** линейного уравнения $ax + by + c = 0$ является **прямая линия**. Координаты любой точки на этой прямой будут решением уравнения.

Очень часто приходится рассматривать математическую модель, состоящую из **двух линейных уравнений с двумя переменными** $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0. \end{cases}$ При этом пару чисел (x; y), которая одновременно является решением первого и второго уравнений, называют **решением системы уравнений**.

Пример 1

Решим систему уравнений $\begin{cases} 2x - y - 3 = 0, \\ x + 2y - 4 = 0. \end{cases}$

Для решения используем графический способ. Построим в одной системе координат графики уравнений $2x - y - 3 = 0$ (прямая l_1) и $x + 2y - 4 = 0$ (прямая l_2). Видно, что прямые l_1 и l_2 пересекаются в единственной точке $A(2; 1)$. Поэтому данная система линейных уравнений имеет единственное решение (2; 1).



Заметим, что графический метод решения не слишком надежный. Может оказаться, что по графику точно не удастся определить координаты точки пересечения прямых.

Обсудим вопрос о **количестве решений** системы двух линейных уравнений с двумя переменными $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0. \end{cases}$ В зависимости от расположения прямых, соответствующих каждому уравнению, возможны три варианта при решении системы.

1) Если $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$, то **прямые пересекаются** и система имеет **единственное решение**.

2) Если $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$, то **прямые параллельны** и система **не имеет решений**. При этом такая система называется **несовместной**.

3) Если $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$, то **прямые совпадают** и система **имеет бесконечно много решений**. Такая система называется **неопределенной**.

Пример 2

При каких значениях a система уравнений $\begin{cases} (2a-1)x + 3y = 7a + 1, \\ (a+2)x + 2y = 5a - 3 \end{cases}$ имеет единственное решение?

Запишем условие единственности решения: $\dfrac{2a-1}{a+2} \neq \dfrac{3}{2}$. Используем свойство пропорции: $2(2a-1) \neq 3(a+2)$ и $4a - 2 \neq 3a + 6$, откуда $a \neq 8$. Итак, при всех значениях a, кроме $a = 8$, данная система имеет единственное решение.

Пример 3

При каком значении a система уравнений $\begin{cases}(2a-1)x+3y=7a+1,\\(2a+1)x+5y=5a-3\end{cases}$ несовместна?

Запишем условие несовместности системы: $\dfrac{2a-1}{2a+1}=\dfrac{3}{5}\neq\dfrac{7a+1}{5a-3}$.

Сначала рассмотрим равенство $\dfrac{2a-1}{2a+1}=\dfrac{3}{5}$. По свойству пропорции получаем: $5(2a-1)=3(2a+1)$, или $10a-5=6a+3$, или $4a=8$, откуда $a=2$. Теперь проверим неравенство $\dfrac{3}{5}\neq\dfrac{7a+1}{5a-3}$. При подстановке значения $a=2$ имеем $\dfrac{3}{5}\neq\dfrac{7\cdot2+1}{5\cdot2-3}$ или $\dfrac{3}{5}\neq\dfrac{15}{7}$ (верное неравенство). Итак, при $a=2$ данная система несовместна.

Пример 4

При каком значении a система уравнений $\begin{cases}(2a-1)x+3y=7a+1,\\(a+1)x+6y=11a+5\end{cases}$ неопределенна? Укажите решения системы.

Запишем условие неопределенности системы: $\dfrac{2a-1}{a+1}=\dfrac{3}{6}=\dfrac{7a+1}{11a+5}$.

Сначала рассмотрим равенство $\dfrac{2a-1}{a+1}=\dfrac{3}{6}$ или $\dfrac{2a-1}{2a+1}=\dfrac{1}{2}$. По свойству пропорции получаем: $2(2a-1)=a+1$, или $4a-2=a+1$, или $3a=3$, откуда $a=1$. Теперь проверим равенство $\dfrac{3}{6}=\dfrac{7a+1}{11a+5}$. При подстановке значения $a=1$ имеем $\dfrac{3}{6}=\dfrac{7\cdot1+1}{11\cdot1+5}$ или $\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$ (верное равенство). Итак, при $a=1$ данная система неопределенна.

Подставим значение $a=1$ в данную систему и получим: $\begin{cases}x+3y=8,\\2x+6y=16.\end{cases}$ Поделим второе уравнение на число 2. Имеем систему $\begin{cases}x+3y=8,\\x+3y=8.\end{cases}$ Решением такой системы будет любая пара чисел x и y, в которой $x=8-3y$, а y – произвольное число.

III. Задание на уроках

№ 11.1 (а, в); 11.3 (а); 11.6; 11.9 (а, в); 11.11 (б); 11.14 (в); 11.16 (а); 11.17 (б); 11.18 (в); 11.20 (а).

IV. Контрольные вопросы

1. Что называется решением системы уравнений с двумя переменными?

2. Что значит решить систему уравнений?

3. Сколько решений может иметь система линейных уравнений с двумя переменными?

4. Напишите общий вид системы линейных уравнений с двумя переменными.

5. Запишите условие единственности решения системы.

6. Напишите условие несовместности системы линейных уравнений.

7. Запишите условие неопределенности системы уравнений.

V. Задание на дом

№ 11.1 (б, г); 11.3 (б); 11.7; 11.9 (б, г); 11.11 (г); 11.14 (б); 11.16 (б); 11.17 (а); 11.18 (г); 11.20 (б).

VI. Творческие задания

1. При каком значении параметра a система уравнений имеет данное решение?

а) $\begin{cases} 2ax+3y=10, \\ 5x+4ay=5a+11 \end{cases}$ (2; 2);   б) $\begin{cases} 4x+7ay=8-7a, \\ 3ax-5y=6a+5 \end{cases}$ (2; −1);

в) $\begin{cases} (2a+3)x+(a+1)y=1, \\ 3ax+2(a-1)y=7+2a \end{cases}$ (−1; 1);   г) $\begin{cases} (3a-1)x+2ay=a+3, \\ (2a+1)x-(a+1)y=2a-1 \end{cases}$ (1; 1);

д) $\begin{cases} 3x-5y=2a+17, \\ 2ax+3y=4a-2 \end{cases}$ (1; a);   е) $\begin{cases} 2x-3y=a-10, \\ 5x+4y=20+3a \end{cases}$ (a; $2a$).

Ответы: а) $a=2$; б) a – любое; в) $a=-3$; г) $a=1$; д) $a=-2$; е) $a=2$.

2. При каких значениях a система имеет единственное решение?

а) $\begin{cases} 3ax+2y=a+3, \\ 6x+4y=2a+1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5ax+3y=2a-1, \\ 3x+2y=a+1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} ax+2y=3a+5, \\ 2x+ay=a-3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x+ay=2a+3, \\ 4ax+3y=a-4. \end{cases}$

Ответы: а) $a \neq 1$; б) $a \neq \frac{9}{10}$; в) $a \neq \pm 2$; г) $a \neq \pm 1{,}5$.

3. При каком значении параметра a система уравнений несовместна?

а) $\begin{cases} 2ax+3y=a+1, \\ 6x+y=2a-1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x-3ay=3a+1, \\ 10x+6y=5a+7; \end{cases}$

в) $\begin{cases} (a-1)x+(2a-1)y=7a-1, \\ 2x+5y=3a+2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} (3a-1)x+2y=4a+1, \\ ax+y=3a. \end{cases}$

Ответы: а) $a=9$; б) $a=-1$; в) $a=3$; г) $a=1$.

4. При каком значении a система уравнений неопределенна:

а) $\begin{cases}3ax-2y=a-2,\\3x+y=-a;\end{cases}$ б) $\begin{cases}(a-1)x+3y=a+2,\\ax+4y=2a;\end{cases}$

в) $\begin{cases}ax+2y=5a,\\2x+ay=a+8;\end{cases}$ г) $\begin{cases}(a-1)x+y=2a-3,\\3x+(a+1)y=a-5.\end{cases}$

Ответы: а) $a=-2$; б) $a=4$; в) $a=2$; г) $a=-2$.

VII. Подведение итогов уроков

§ 12. Метод подстановки

Урок 30. Использование метода подстановки для решения систем уравнений

Цель: рассмотреть способ подстановки для решения систем уравнений.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Что называется решением системы уравнений с двумя переменными?

2. Запишите условие единственности решения системы уравнений.

3. Графически решите систему уравнений $\begin{cases}x+2y=5,\\y-x=1.\end{cases}$

4. При каких значениях a система уравнений $\begin{cases}3x+5y=a+2,\\6x+ay=2a\end{cases}$ несовместна?

Вариант 2

1. Что значит решить систему уравнений?

2. Напишите условие несовместности системы уравнений.

3. Графически решите систему уравнений $\begin{cases} 2x + y = 4, \\ 2y - x = 3. \end{cases}$

4. При каких значениях a система уравнений $\begin{cases} ax + 2y = a + 3, \\ 2x + 4y = 5a \end{cases}$ имеет единственное решение?

III. Изучение нового материала

Системы уравнений с двумя переменными, которые имеют одни и те же решения или не имеют решений, называются равносильными.

Пример 1

а) Две системы уравнений $\begin{cases} 2x + 3y = 7, \\ 4x + 5y = 13 \end{cases}$ и $\begin{cases} 3x - 2y = 4, \\ 7x - 9y = 5 \end{cases}$ равносильны, т. к. имеют одно и то же решение (2; 1).

б) Две системы уравнений $\begin{cases} 3x - 2y = 5, \\ -6x + 4y = 7 \end{cases}$ и $\begin{cases} 2x + 5y = 6, \\ -4x - 10y = 8 \end{cases}$ равносильны, т. к. каждая из них не имеет решений.

При решении системы уравнений с помощью преобразований ее заменяют более простой равносильной системой. Одним из распространенных способов решения систем уравнений является **способ подстановки**. Рассмотрим его на примере.

Пример 2

Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x + y = 4, \\ 3x - 2y = -1 \end{cases} (1).$$

Из первого уравнения выразим переменную y через x и получим: $y = 4 - 2x$ (заметим, что это уравнение равносильно исходному). Подставим это выражение во второе уравнение вместо переменной y и получим систему:

$$\begin{cases} y = 4 - 2x, \\ 3x - 2(4 - 2x) = -1 \end{cases} (2).$$

Можно показать, что системы (1) и (2) равносильны.

В системе (2) второе уравнение содержит только одну переменную x. Решим это линейное уравнение. Получаем: $3x - 8 + 4x = -1$ или $7x = 7$, откуда $x = 1$. Подставим значение $x = 1$ в первое уравнение системы (2) и найдем $y = 4 - 2 \cdot 1 = 2$. Пара чисел (1; 2) – решение системы (2), а значит, и данной системы (1).

Система линейных уравнений с двумя переменными была решена **методом подстановки**. Заметим, что таким способом решаются и системы нелинейных уравнений. При решении систем **этим методом**:

1) выражают из одного уравнения системы одну переменную через другую;

2) подставляют полученное выражение вместо переменной в другое уравнение;

3) решают полученное уравнение с одной переменной;

4) находят соответствующее значение второй переменной;

5) записывают решение системы.

Пример 3

Решим систему уравнений $\begin{cases}3x+4y=5,\\2x-5y=3.\end{cases}$

Выразим из первого уравнения переменную y через x. Имеем: $4y = 5 - 3x$ и $y=\frac{5-3x}{4}$. Подставим во второе уравнение вместо y полученное выражение $\frac{5-3x}{4}$. Получаем уравнение с одной переменной: $2x-5\cdot\frac{5-3x}{4}=3$. Умножим все члены уравнения на число 4. Имеем: $8x - 5(5 - 3x) = 12$, или $8x - 25 + 15x = 12$, или $23x = 37$, откуда находим $x=\frac{37}{23}$. Подставим в уравнение $y=\frac{5-3x}{4}$ вместо x число $\frac{37}{23}$ и получим: $y=\frac{5-3\cdot\frac{37}{23}}{4}=\left(5-3\cdot\frac{37}{23}\right):4=\frac{5\cdot23-3\cdot37}{23}:4=$ $=\frac{115-111}{23}:4=\frac{1}{23}$. Итак, единственное решение этой системы $x=\frac{37}{23}$ и $y=\frac{1}{23}$. Заметим, что найти это решение графическим способом можно лишь приближенно.

Способом подстановки можно решать и системы уравнений, содержащих параметры.

Пример 4

При каких значениях параметра a решением системы уравнений $\begin{cases}2x-y=-3,\\3x+2y=7a-1\end{cases}$ будет неотрицательная пара чисел?

Из первого уравнения выразим переменную $y = 2x + 3$ и подставим во второе уравнение. Получаем: $3x + 2(2x +3) = 7a - 1$, или

$3x + 4x + 6 = 7a - 1$, или $7x = 7a - 7$. Разделим все части равенства на число 7 и найдем $x = a - 1$. Используя выражение $y = 2x + 3$, находим $y = 2(a - 1) + 3 = 2a - 2 + 3 = 2a + 1$. При каждом значении параметра a система уравнений имеет единственное решение $x = a - 1$ и $y = 2a + 1$. По условию такие числа должны быть неотрицательны. Число $x = a - 1$ неотрицательно при значениях a, не меньших числа 1 (т. е. $a \geq 1$). При этих a число $y = 2a + 1$ будет положительным.

IV. Задание на уроке

№ 12.2 (а, г); 12.7 (а, б); 12.10 (в, г); 12.12; 12.16 (а, г); 12.21 (в); 12.22 (г); 12.24; 12.26 (б); 12.27 (а); 12.28 (в).

V. Контрольные вопросы

1. Какие системы уравнений называются равносильными?
2. Как решить систему уравнений методом подстановки?

VI. Задание на дом

№ 12.2 (б, в); 12.7 (в, г); 12.10 (а, б); 12.13; 12.16 (б, в); 12.21 (г); 12.22 (в); 12.25; 12.26 (а); 12.27 (б); 12.28 (г).

VII. Творческие задания

1. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 2x - y = 1, \\ 3x + 2y = 7a - 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + 3y = 4a + 2, \\ 3x - 2y = a - 5; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x + y = 2a - 1, \\ 5x - 3y = 19 - 6a; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x - 4y = 2a - 7, \\ x + 3y = 5a + 2. \end{cases}$

Ответы: а) $x = a$, $y = 2a - 1$; б) $x = a - 1$, $y = a + 1$; в) $x = 2$, $y = 2a - 3$; г) $x = 2a - 1$, $y = a + 1$.

2. При каком значении параметра a решение (x_0, y_0) системы уравнений удовлетворяет условию?

а) $\begin{cases} 6x - 7y = 4a, \\ 2x + y = 8a, \end{cases}$ $x_0 + y_0 > 10;$ б) $\begin{cases} 3x + 2y = 8a - 1, \\ x + 3y = 5a + 2, \end{cases}$ $x_0 + y_0 = -18;$

в) $\begin{cases} 5x + y = 7a - 5, \\ 2x + 3y = 8a - 2, \end{cases}$ $y_0 - 2x_0 > 0;$ г) $\begin{cases} 4x - y = 2a - 4, \\ x + 2y = 5a - 1, \end{cases}$ $2x_0 > y_0.$

Ответы: а) $a > 0$ (решение $x_0 = 3a$, $y_0 = 2a$); б) $a = -6$ (решение $x_0 = 2a - 1$, $y_0 = a + 1$); в) при всех a (решение $x_0 = a - 1$, $y_0 = 2a$); г) нет таких a (решение $x_0 = a - 1$, $y_0 = 2a$).

VIII. Подведение итогов урока

§ 13. Метод алгебраического сложения

Уроки 31–32. Использование метода алгебраического сложения для решения систем уравнений

Цель: освоить еще один способ решения систем уравнений – способ сложения.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

Способом подстановки решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} 3x+5y=11, \\ 5x-2y=8; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x+7y=9a-5, \\ 3x-5y=2-2a. \end{cases}$

Вариант 2

Способом подстановки решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} 4x-3y=5, \\ 3x+4y=10; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x+2y=7a+6, \\ 4x-3y=8-2a. \end{cases}$

III. Изучение нового материала

Рассмотрим еще один способ решения систем линейных уравнений – **способ сложения**. При таком способе решения **данная система уравнений заменяется равносильной системой, в которой одно из уравнений содержит только одну переменную.**

Пример 1

Решим систему уравнений: $\begin{cases} 3x+2y=8, \\ 4x-2y=6 \end{cases}$ (1).

Заметим, что в уравнениях системы коэффициенты при переменной y являются противоположными числами. Сложим почленно уравнения системы: $3x + 2y + 4x - 2y = 8 + 6$. Получим линейное уравнение с одной переменной x, а именно $7x = 14$. Заменим одно из уравнений системы (1), например первое, полученным уравнением $7x = 14$. Имеем равносильную систему:

$\begin{cases} 7x=14, \\ 4x-2y=6 \end{cases}$ (2).

Решим систему (2). Из первого уравнения находим $x = 2$.

Подставим это значение x во второе уравнение системы. Имеем линейное уравнение с переменной y: $4 \cdot 2 - 2y = 6$, или $8 - 2y = 6$, или $-2y = -2$, откуда $y = 1$. Пара чисел (2; 1) – решение системы (2), а следовательно, и равносильной системы (1).

Из разобранного примера видно, что **при сложении уравнений системы получилось уравнение только с одной переменной. В качестве второго уравнения системы можно выбрать любое из уравнений данной системы.** В результате таких преобразований была получена **система, равносильная данной.** В этом состоит **суть метода сложения.**

Пример 2

Решим систему уравнений $\begin{cases} 3x - 5y = 9, \\ 2x - 7y = 17 \end{cases}$ способом сложения.

В отличие от предыдущего примера в этом случае коэффициенты при y (а также и при x) не являются противоположными числами. Поэтому сложение уравнений не позволит получить уравнение с одной переменной. Следовательно, необходимо добиться того, чтобы в уравнениях коэффициенты при любой переменной, например при y, стали противоположными числами.

Коэффициенты при y являются простыми числами 5 и 7. Поэтому умножим все члены первого уравнения на число 7, второе уравнение – на число (–5). При этом уравнения будут равносильными и система также равносильна данной $\begin{cases} 21x - 35y = 63, \\ -10x + 35y = -85. \end{cases}$ В такой системе коэффициенты при y – противоположные числа. Поэтому сложим уравнения системы и получим линейное уравнение с одной переменной: $21x - 35y - 10x + 35y = 63 - 85$ или $11x = -22$.

Запишем систему, равносильную данной. В качестве первого уравнения выберем полученное уравнение, в качестве второго уравнения, например, первое уравнение данной системы. Имеем: $\begin{cases} 11x = -22, \\ 3x - 5y = 9. \end{cases}$ Из первого уравнения найдем $x = -2$ и подставим это значение во второе уравнение. Получаем линейное уравнение с одной переменной: $3 \cdot (-2) - 5y = 9$, или $-6 - 5y = 9$, или $-5y = 15$, откуда $y = -3$. Итак, данная система уравнений имеет единственное решение (–2; –3).

Пример 3

Решим систему уравнений $\begin{cases} 6x + 5y = 7, \\ 4x - 3y = 11. \end{cases}$

Избавимся теперь от переменной x. Коэффициенты при x в уравнениях – числа 6 и 4 – уже не являются простыми числами (составные числа). Найдем их наименьшее общее кратное НОК (6; 4) = 12. Так как 12 : 6 = 2 и 12 : 4 = 3, то умножим все члены первого уравнения на число 2, второго уравнения – на число (−3). Получаем равносильную систему уравнений $\begin{cases}12x+10y=14,\\-12x+9y=-33.\end{cases}$ Сложим уравнения этой системы и получим линейное уравнение с переменной y: $12x + 10y - 12x + 9y = 14 - 33$ или $19y = -19$.

Запишем равносильную систему уравнений. В качестве первого уравнения выберем полученное уравнение, в качестве второго уравнения – второе уравнение данной системы. Имеем: $\begin{cases}19y=-19,\\4x-3y=11.\end{cases}$ Из первого уравнения найдем $y = -1$ и подставим это значение во второе уравнение. Получаем линейное уравнение с одной переменной: $4x - 3\cdot(-1) = 11$ или $4x = 8$, откуда $x = 2$. Итак, данная система уравнений имеет единственное решение (2; −1).

Из рассмотренных примеров следует, что **при решении систем линейных уравнений методом сложения**:

1) умножают уравнения системы, подбирая множители так, чтобы коэффициенты при одной из переменных стали противоположными числами;

2) складывают почленно левые и правые части уравнений системы;

3) решают полученное уравнение с одной переменной;

4) находят соответствующее значение второй переменной.

Отметим, что если в уравнениях системы коэффициенты при одной из переменных являются противоположными числами, то при решении пункт 1 пропускают и начинают сразу с пункта 2.

Способ сложения можно использовать и при решении систем уравнений с параметрами.

Пример 4

Пусть (x_0, y_0) – решение системы $\begin{cases}2x+3y=5a+4,\\4x+5y=9a+6.\end{cases}$ При каких значениях a величина $2x_0 + y_0 \geq 0$?

Сначала решим данную систему методом сложения. Для этого умножим все члены первого уравнения на число (−2) и получим равносильную систему $\begin{cases}-4x-6y=-10a-8,\\4x+5y=9a+6.\end{cases}$ Сложим уравнения системы почленно. Получаем линейное уравнение с одной переменной: $-4x - 6y + 4x + 5y = -10a - 8 + 9a + 6$ или $-y = -a - 2$, откуда $y = a + 2$. Подставим это значение y, например, в первое уравнение данной системы: $2x + 3(a + 2) = 5a + 4$, или $2x + 3a + 6 = 5a + 4$, или $2x = 5a + 4 - 3a - 6$, или $2x = 2a - 2$, откуда $x = a - 1$. Итак, для каждого значения параметра a данная система уравнений имеет единственное решение $x_0 = a - 1$, $y_0 = a + 2$.

Найдем величину $2x_0 + y_0 = 2(a-1) + (a+2) = 2a - 2 + a + 2 = 3a$. По условию эта величина должна быть неотрицательной, т. е. $3a \geq 0$. Очевидно, что такое неравенство выполняется только при неотрицательных значениях a, т. е. при $a \geq 0$.

IV. Задание на уроках

№ 13.2(а); 13.5 (в); 13.9 (а, г); 13.12 (а); 13.13 (г); 13.15 (б); 13.16 (а); 13.17 (б); 13.18 (а).

V. Контрольные вопросы

1. Основная цель при решении систем уравнений методом сложения.
2. Как решить систему уравнений методом сложения? Объясните на примере.

VI. Задание на дом

№ 13.2 (б); 13.5 (а); 13.9 (б, в); 13.12 (б); 13.13 (в); 13.15 (г); 13.16 (б); 13.17 (а); 13.18 (б).

VII. Творческие задания

Решите задания 1 и 2 из творческих заданий предыдущего урока методом сложения.

VIII. Подведение итогов уроков

§ 14. Системы двух линейных уравнений с двумя переменными как математические модели реальных ситуаций

Уроки 33–34. Решение текстовых задач с помощью систем уравнений

Цель: использование систем линейных уравнений для решения текстовых задач.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

Способом сложения решите систему линейных уравнений:

1) $\begin{cases}3x+5y=11,\\5x-2y=8;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}2x+7y=9a-5,\\3x-5y=2-2a.\end{cases}$

Вариант 2

Способом сложения решите систему линейных уравнений:

1) $\begin{cases}4x-3y=5,\\3x+4y=10;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}3x+2y=7a+6,\\4x-3y=8-2a.\end{cases}$

III. Изучение нового материала

При решении текстовых задач с помощью систем уравнений:

1) обозначаются неизвестные величины буквами;

2) используя условия задачи, для этих букв составляют систему уравнений;

3) решают полученную систему уравнений;

4) объясняют результат в соответствии с условием задачи.

Пример 1

В трех тетрадях и четырех блокнотах вместе 108 страниц. В двух блокнотах столько же страниц, сколько их в трех тетрадях. Сколько страниц в каждой тетради и в каждом блокноте?

Пусть в каждой тетради x страниц, в каждом блокноте – y страниц. Тогда в трех тетрадях $3x$ страниц, а в четырех блокнотах $4y$ страниц. По условию задачи общее количество страниц в этих тетрадях и блокнотах равно 108. Поэтому получаем первое уравнение $3x + 4y = 108$.

В двух блокнотах $2y$ страниц, в трех тетрадях $3x$ страниц. По условию задачи это количество страниц равно. Тогда имеем второе уравнение $2y = 3x$.

Итак, получили систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными $\begin{cases}3x+4y=108,\\2y=3x.\end{cases}$ Решим ее, например, методом подстановки. Из второго уравнения выразим переменную $y=\frac{3}{2}x$ и подставим в первое уравнение. Имеем: $3x+4\cdot\frac{3}{2}x=108$, или $3x+6x=108$, или

$9x = 108$, откуда $x = 12$. Подставим это значение x в выражение $y = \frac{3}{2}x$ и найдем $y = \frac{3}{2} \cdot 12 = 18$.

Вернемся к началу задачи и вспомним обозначения. Итак, получили, что в тетради 12 страниц, а в блокноте 18 страниц.

Пример 2

Можно ли разменять купюру в 1000 рублей купюрами в 10 рублей и 50 рублей, если для размена можно использовать 26 купюр?

Предположим, что для размена использовалось x купюр в 10 рублей и y купюр в 50 рублей. По условию для размена можно использовать 26 купюр. Поэтому получаем первое уравнение $x + y = 26$. Учтем, что x купюр по 10 рублей стоят $10x$ рублей, а y купюр по 50 рублей стоят $50y$ рублей. Тогда общая стоимость этих купюр $10x + 50y$ по условию задачи должна составлять 1000 рублей. Имеем второе уравнение $10x + 50y = 1000$.

Получили систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными $\begin{cases} x + y = 26, \\ 10x + 50y = 1000. \end{cases}$ Решим эту систему способом сложения. Для этого умножим все члены первого уравнения на число (−50) и получим равносильную систему $\begin{cases} -50x - 50y = 1300, \\ 10x + 50y = 1000. \end{cases}$ Сложим уравнения системы и получим линейное уравнение с одной переменной: $-50x - 50y + 10x - 50y = -1300 + 1000$ или $-40x = -300$, откуда $x = 7{,}5$. Подставим это значение в первое уравнение данной системы: $7{,}5 + y = 26$ и найдем $y = 18.5$.

Вернемся к обозначениям в начале задачи. Получаем, что для размена надо использовать 7,5 купюры в 10 рублей и 18,5 купюры в 50 рублей. По смыслу задачи числа x и y могут быть только натуральными числами или нулем. Поэтому разменять купюру в 1000 рублей заданным способом нельзя.

IV. Задание на уроках

№ 14.1; 14.5; 14.8; 14.12; 14.15; 14.19; 14.27; 14.32; 14.34.

V. Задание на дом

№ 14.2; 14.6; 14.9; 14.13; 14.16; 14.20; 14.31; 14.33.

VI. Подведение итогов уроков

Уроки 35–36. Контрольная работа № 3 по теме «Системы двух линейных уравнений с двумя переменными»

Контрольная работа составлена в шести вариантах различной сложности (варианты 1, 2 – самые простые, варианты 3, 4 – средней сложности; варианты 5, 6 – самые сложные). Степень сложности меняется не слишком резко. Поэтому можно рекомендовать следующий критерий оценки: при решении вариантов 1, 2 оценка «3» ставится за любые три решенные задачи, оценка «4» – за четыре задачи и оценка «5» – за пять задач. Одна задача дает школьникам некоторую свободу выбора. При тех же критериях оценки за решение вариантов 3, 4 добавляется к набранным баллам дополнительно 0,5 балла; за решение вариантов 5, 6 – дополнительно 1,0 балл (т. е. оценка «5» ставится уже за четыре задачи). Все задачи в варианте примерно равноценны. Могут быть несколько тяжелее задачи 5, 6.

Перед проведением контрольной работы целесообразно ознакомить учащихся с критериями оценки и разной сложностью вариантов. Выбор вариантов может быть осуществлен учителем или предоставлен самим учащимся (в этом случае предполагается наличие копировальной техники в школе и избыточное количество заданий работы). При наличии такой техники в классе на стенде (после урока – разбора контрольной) может быть вывешено решение всех задач шести вариантов. Разумеется, разобрать такое количество задач на уроке невозможно (да и не нужно).

Вариант 1

1. Из пары чисел (–2; 1); (2; –1); (1; 2) выберите решение системы линейных уравнений $\begin{cases} 7x+4y=10, \\ 2x+3y=1. \end{cases}$

2. Графическим способом решите систему линейных уравнений $\begin{cases} y-2x=0, \\ y-x=2. \end{cases}$

3. Решите систему уравнений $\begin{cases} 3x-2y=4, \\ y+2x=5 \end{cases}$ способом подстановки.

4. Систему уравнений $\begin{cases} 3x+4y=14, \\ 5x+2y=14 \end{cases}$ решите способом сложения.

5. Прямая $y = kx + b$ проходит через точки $A(2; 7)$ и $B(-1; -2)$. Найти величины k и b.

6. Пять досок и шесть брусьев весят 107 кг. Четыре доски тяжелее двух брусьев на 4 кг. Сколько весит одна доска и один брус?

Вариант 2

1. Из пары чисел (−2; 1); (−1; 2); (1; 2) выберите решение системы линейных уравнений $\begin{cases}5x+4y=3,\\3x+6y=9.\end{cases}$

2. Графическим способом решите систему линейных уравнений $\begin{cases}y-x=0,\\y+x=4.\end{cases}$

3. Решите систему уравнений $\begin{cases}5x-3y=1,\\x+2y=5\end{cases}$ способом подстановки.

4. Систему уравнений $\begin{cases}3x-5y=8,\\6x+3y=3\end{cases}$ решите способом сложения.

5. Прямая $y = kx + b$ проходит через точки $A(3; 3)$ и $B(-1; -5)$. Найти величины k и b.

6. Семь досок и три кирпича весят 71 кг. Три доски тяжелее двух кирпичей на 14 кг. Сколько весит одна доска и один кирпич?

Вариант 3

1. Из пары чисел (−2; 1); (3; −1); (2; −2) выберите решение системы нелинейных уравнений $\begin{cases}x^2+3|y-1|=15,\\|1-x|+y^2=3.\end{cases}$

2. Графическим способом решите систему уравнений $\begin{cases}-x+y=1,\\y-|x|=-1.\end{cases}$

3. Решите систему уравнений $\begin{cases}2(x+y)-3(x-y)=4,\\5(x+y)-7(x-y)=2.\end{cases}$

4. Прямая $y = kx + b$ проходит через точки $A(-1; -5)$ и $B(2; 4)$. Найти величины k и b.

5. При всех значениях параметра a определите число решений системы уравнений $\begin{cases}2x+5y=3,\\x+ay=2a.\end{cases}$

6. Решите уравнение $(2x-3y)^2+5|x-2y+3|=0$.

Вариант 4

1. Из пары чисел (−2; 1); (3; −2); (2; −2) выберите решение системы нелинейных уравнений $\begin{cases}x^2-2|y-2|=1,\\|2-x|+y^2=5.\end{cases}$

2. Графическим способом решите систему уравнений $\begin{cases} x-y=0, \\ y+|x|=2. \end{cases}$

3. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2(x-y)+3(x+y)=39, \\ 3(x-y)-2(x+y)=-13. \end{cases}$

4. Прямая $y = kx + b$ проходит через точки $A(-2; 4)$ и $B(1; -5)$. Найти величины k и b.

5. При всех значениях параметра a определите число решений системы уравнений $\begin{cases} 3x+2y=4a, \\ ax+y=3. \end{cases}$

6. Решите уравнение $(3x+2y)^2+7|3x-y-6|=0$.

Вариант 5

1. Система уравнений $\begin{cases} ax+by=11, \\ (b+1)x+ay=9 \end{cases}$ имеет решение (2; 1). Найдите числа a и b.

2. Графически решите систему уравнений $\begin{cases} y-|x+1|=0, \\ y+|x|=1. \end{cases}$

3. Решите систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{3}{x-2}-\dfrac{2}{y+5}=1, \\ \dfrac{2}{x-2}+\dfrac{3}{y+5}=5. \end{cases}$

4. Прямые $y = 3 - x$, $y = 3x$, $y = ax - 2$ пересекаются в одной точке. Найдите коэффициент a.

5. Катер прошел по течению реки от пункта A до пункта B за 6 часов, а от B до A – за 8 часов. За сколько часов проплывет плот от A до B?

6. При всех значениях параметра a определите число решений системы $\begin{cases} ax+y=a^3, \\ x+ay=a. \end{cases}$

Вариант 6

1. Система уравнений $\begin{cases} ax+by=7, \\ (2b+1)x+(3a-2)y=19 \end{cases}$ имеет решение (1; 2). Найдите числа a и b.

2. Графически решите систему уравнений $\begin{cases} y-|x-1|=0, \\ |x|-y=1. \end{cases}$

3. Решите систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{4}{x-1} - \dfrac{3}{y+2} = 1, \\ \dfrac{3}{x-1} + \dfrac{4}{y+2} = 5. \end{cases}$

4. Прямые $y = 3x - 5$, $y = 1/2x$, $y = ax - 3$ пересекаются в одной точке. Найдите коэффициент a.

5. Катер прошел по течению реки от пункта A до пункта B за 4 часа, а от B до A – за 6 часов. За сколько часов проплывет плот от A до B.

6. При всех значениях параметра a определите число решений системы $\begin{cases} x + ay = a^4, \\ ax + y = a^2. \end{cases}$

Урок 37. Анализ контрольной работы

Ход урока

I. Итоги работы

1. Распределение работ по вариантам и результаты решения.

Данные о результатах работы удобно заносить в таблицу (для каждой пары вариантов).

№ задачи / Итоги	1	2	3	…	6
+	5				
±	1				
—	1				
Ø	1				

Обозначения:

\+ – число решивших задачу правильно или почти правильно;

± – число решивших задачу со значительными погрешностями;

— – число не решивших задачу;

Ø – число не решавших задачу.

2. Типичные ошибки при решении задач.

3. Задачи, вызвавшие наибольшие трудности, и их разбор (учителем или школьниками, сделавшими эту задачу).

II. Разбор задач вариантов

Ответы

Вариант 1

1. *Ответ*: (2; –1).

2. *Ответ*: (2; 4).
3. *Ответ*: (2; 1).
4. *Ответ*: (2; 2).
5. *Ответ*: $y = 3x + 1$.
6. *Ответ*: вес доски 7 кг, бруса – 12 кг.

Вариант 2

1. *Ответ*: (–1; 2).
2. *Ответ*: (2; 2).
3. *Ответ*: (1; 2).
4. *Ответ*: (1; –1).
5. *Ответ*: $y = 2x - 3$.
6. *Ответ*: вес доски 8 кг, кирпича – 5 кг.

Вариант 3

1. *Ответ*: (3; –1).
2. *Ответ*: (–1; 0).
3. *Ответ*: (–19; –3).
4. *Ответ*: $y = 3x - 2$.
5. *Ответ*: при $a \neq 2{,}5$ единственное решение, при $a = 2{,}5$ решений нет.
6. *Ответ*: (9; 6).

Вариант 4

1. *Ответ*: (3; –2).
2. *Ответ*: (1; 1).
3. *Ответ*: (7; 4).
4. *Ответ*: $y = -3x - 2$.
5. *Ответ*: при $a \neq 1{,}5$ единственное решение, при $a = 1{,}5$ бесконечно много решений.
6. *Ответ*: (4/3; –1).

Решения

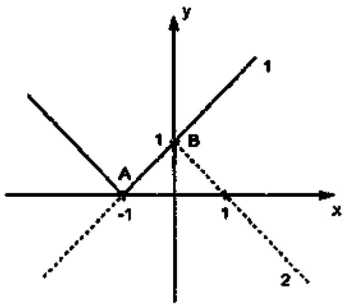
Вариант 5

1. Подставим данное решение (2; 1) в систему уравнений $\begin{cases} ax + by = 11, \\ (b+1)x - ay = 9 \end{cases}$ и получим систему линейных уравнений для определения величин a и b: $\begin{cases} 2a + b = 11, \\ (b+1)\cdot 2 - a = 9 \end{cases}$ или $\begin{cases} 2a + b = 11, \\ -a + 2b = 7. \end{cases}$ Решим эту систему способом подстановки. Из первого уравнения выразим $b = 11 - 2a$ и подставим во второе уравнение. Получаем линейное уравнение с одной неизвестной: $-a + 2(11 - 2a) = 7$, или $-a + 22 - 4a = 7$, или $-5a = -15$, откуда $a = 3$. Используя формулу $b = 11 - 2a$, найдем $b = 11 - 2\cdot 3 = 11 - 6 = 5$.

Ответ: $a = 3$, $b = 5$.

2. Систему уравнений $\begin{cases} y-|x+1|=0, \\ y+|x|=1 \end{cases}$ запишем в виде $\begin{cases} y=|x+1|, \\ y=1-|x|. \end{cases}$

Построим график функций $y = |x + 1|$ (ломаная 1) и $y = 1 - |x|$ (ломаная 2). Видно, что графики совпадают по отрезку AB. Следовательно, данная система имеет бесконечно много решений. Запишем их. Отрезок AB расположен на прямой $y = x + 1$, при этом абсцисса любой точки отрезка AB удовлетворяет условию $-1 \le x \le 0$. Поэтому решением данной системы будут пары чисел $(x; y)$ таких, что $-1 \le x \le 0$ и $y = x + 1$.



Ответ: $-1 \le x \le 0$, $y = x + 1$.

3. Система уравнений $\begin{cases} \dfrac{3}{x-2}-\dfrac{2}{y+5}=1, \\ \dfrac{2}{x-2}+\dfrac{3}{y+5}=5 \end{cases}$ нелинейная. Однако при ее решении также можно использовать способ сложения. Для этого перед слагаемыми, зависящими от y, сделаем коэффициенты противоположными. Умножим первое уравнение на число 3, второе уравнение – на число 2. Получаем систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{3}{x-2}-\dfrac{6}{y+5}=3, \\ \dfrac{4}{x-2}+\dfrac{6}{y+5}=10. \end{cases}$

Сложим уравнения системы и получим уравнение с одной неизвестной: $\dfrac{9}{x-2}+\dfrac{4}{x-2}=3+10$ или $\dfrac{13}{x-2}=13$. Тогда знаменатель дроби $x - 2 = 1$, откуда $x = 3$. Подставим это значение, например, в первое уравнение: $\dfrac{3}{3-2}-\dfrac{2}{y+5}=1$, или $3-\dfrac{2}{y+5}=1$, или $2=\dfrac{2}{y+5}$. Тогда знаменатель дроби $y + 5 = 1$, откуда $y = -4$. Итак, система имеет единственное решение $(3; -4)$.

Ответ: $(3; -4)$.

4. Пусть данные прямые пересекаются в точке $A(x_0; y_0)$. Тогда координаты этой точки удовлетворяют уравнениям прямых. Получаем систему уравнений с параметром a: $\begin{cases} y_0 = 3 - x_0, \\ y_0 = 2x_0, \\ y_0 = ax_0 - 2. \end{cases}$ Первые два уравнения не содержат параметра a. Поэтому сначала решим систему, образованную этими уравнениями $\begin{cases} y_0 = 3 - x_0, \\ y_0 = 2x_0. \end{cases}$. Для ее решения используем еще один способ – способ сравнения. Так как в этих уравнениях равны левые части, то можно приравнять и правые части. Получаем линейное уравнение с одной неизвестной: $3 - x_0 = 2x_0$ или $3 = 3x_0$, откуда $x_0 = 1$. Из первого уравнения этой системы находим $y_0 = 3 - 1 = 2$. Итак, первые две прямые пересекаются в точке $A(1; 2)$. Подставим найденные значения x_0 и y_0 в третье уравнение данной системы: $2 = a \cdot 1 - 2$ или $2 = a - 2$, откуда $a = 4$.

Ответ: $a = 4$.

5. Пусть расстояние между пунктами A и B равно s км, собственная скорость катера (скорость в стоячей воде) равна x км/ч, скорость течения реки – y км/ч. При движении по течению реки скорость катера увеличивается и равна $x + y$ (км/ч). За 6 часов катер, двигаясь с такой скоростью, проходит расстояние $(x + y)6$, равное s. Получаем первое уравнение $6(x + y) = s$. При движении против течения реки скорость катера уменьшается и равна $x - y$ (км/ч). За 8 часов катер, двигаясь с такой скоростью, проходит расстояние $(x - y)8$, равное s. Имеем второе уравнение $8(x - y) = s$.

Получим систему уравнений $\begin{cases} 6(x + y) = s, \\ 8(x - y) = s \end{cases}$ или $\begin{cases} 6x + 6y = s, \\ 8x - 8y = s. \end{cases}$ Особенность этой системы в том, что в нее входят три неизвестных и два уравнения. Поэтому найти эти неизвестные нельзя. Плот может двигаться только со скоростью реки y км/ч. Поэтому способом сложения исключим из этой системы переменную x. Для этого умножим первое уравнение на число 4, второе уравнение – на число (-3). Получаем равносильную систему уравнений $\begin{cases} 24x + 24y = 4s, \\ -24x + 24y = -3s. \end{cases}$ Сложим уравнения системы: $24y + 24y = 4s - 3s$ или $48y = s$. Плот пройдет расстояние s со скоростью y за время $\frac{s}{y} = \frac{48y}{y} = 48$ (ч).

Ответ: 48 ч.

6. Для системы уравнений $\begin{cases} ax + y = a^3, \\ x + ay = a \end{cases}$ запишем условие единственности решения: $\frac{a}{1} \neq \frac{1}{a}$, или $a^2 \neq 1$, откуда $a \neq 1$ и $a \neq -1$. При $a \neq \pm 1$ система имеет единственное решение. Определим число решений системы при $a = -1$ и $a = 1$.

Подставим значение $a = -1$ в данную систему и получим: $\begin{cases} -x + y = (-1)^3, \\ x - y = -1 \end{cases}$ или $\begin{cases} -x + y = -1, \\ x - y = -1. \end{cases}$ Умножим первое уравнение на число (-1). Получаем равносильную систему уравнений $\begin{cases} x - y = 1, \\ x - y = -1. \end{cases}$ Очевидно, что такая система решений не имеет, т. к. одна и та же величина $x - y$ из первого уравнения равна 1, из второго уравнения равна (-1).

Подставим значение $a = 1$ в данную систему и получим: $\begin{cases} x + y = 1^3, \\ x + y = 1 \end{cases}$ или $\begin{cases} x + y = 1, \\ x + y = 1. \end{cases}$ Такая система уравнений имеет бесконечно много решений, так как уравнения системы одинаковы.

Ответ: при $a \neq \pm 1$ единственное решение, при $a = -1$ решений нет, при $a = 1$ бесконечно много решений.

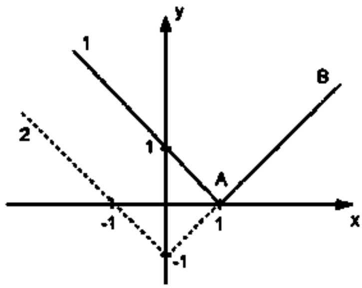
Вариант 6

1. Подставим данное решение (1; 2) в систему уравнений $\begin{cases} ax + by = 7, \\ (2b + 1)x + (3a - 2)y = 19 \end{cases}$ и получим систему линейных уравнений для определения величин a и b: $\begin{cases} a + 2b = 7, \\ (2b + 1) \cdot 1 - (3a - 2) \cdot 2 = 19 \end{cases}$ или $\begin{cases} a + 2b = 7, \\ 6a + 2b = 22. \end{cases}$ Решим эту систему способом подстановки. Из первого уравнения выразим $a = 7 - 2b$ и подставим во второе уравнение. Получаем линейное уравнение с одной неизвестной: $6(7 - 2b) + 2b = 22$, или $42a - 12b + 2b = 22$, или $-10b = -20$, откуда $b = 2$. Используя формулу $a = 7 - 2\ b$, найдем $a = 7 - 2 \cdot 2 = 7 - 4 = 3$.

Ответ: $a = 3$, $b = 2$.

2. Систему уравнений $\begin{cases} y-|x-1|=0, \\ |x|-y=1 \end{cases}$ запишем в виде $\begin{cases} y=|x-1|, \\ y=|x|-1. \end{cases}$

Построим график функций $y = |x - 1|$ (ломаная 1) и $y = |x| - 1$ (ломаная 2). Видно, что графики совпадают по лучу AB. Следовательно, данная система имеет бесконечно много решений. Запишем их. Луч AB расположен на прямой $y = x - 1$, при этом абсцисса любой точки луча AB удовлетворяет условию $x \geq 1$. Поэтому решением данной системы будут пары чисел $(x; y)$ таких, что $x \geq 1$ и $y = x - 1$.



Ответ: $x \geq 1$, $y = x - 1$.

3. Система уравнений $\begin{cases} \dfrac{4}{x-1}-\dfrac{3}{y+2}=1, \\ \dfrac{3}{x-1}+\dfrac{2}{y+2}=5 \end{cases}$ нелинейная. Однако при ее решении также можно использовать способ сложения. Для этого перед слагаемыми, зависящими от y, сделаем коэффициенты противоположными. Умножим первое уравнение на число 2, второе уравнение – на число 3. Получаем систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{8}{x-1}-\dfrac{6}{y+2}=2, \\ \dfrac{9}{x-1}+\dfrac{6}{y+2}=15. \end{cases}$

Сложим уравнения системы и получим уравнение с одной неизвестной: $\dfrac{8}{x-1}+\dfrac{9}{x-1}=2+15$ или $\dfrac{17}{x-1}=17$. Тогда знаменатель дроби $x - 1 = 1$, откуда $x = 2$. Подставим это значение, например, в первое уравнение: $\dfrac{4}{2-1}-\dfrac{3}{y+2}=1$, или $4-\dfrac{3}{y+2}=1$, или $3=\dfrac{3}{y+2}$. Тогда знаменатель дроби $y + 2 = 1$, откуда $y = -1$. Итак, система имеет единственное решение $(2; -1)$.

Ответ: $(2; -1)$.

4. Пусть данные прямые пересекаются в точке $A(x_0;\ y_0)$. Тогда координаты этой точки удовлетворяют уравнениям прямых. Получаем систему уравнений с параметром a: $\begin{cases} y_0 = 3x_0 - 5, \\ y_0 = \dfrac{1}{2}x_0, \\ y_0 = ax_0 - 3. \end{cases}$ Первые два уравнения не содержат параметра a. Поэтому сначала решим систему, образованную этими уравнениями $\begin{cases} y_0 = 3x_0 - 5, \\ y_0 = \dfrac{1}{2}x_0. \end{cases}$ Для ее решения используем еще один способ – способ сравнения. Так как в этих уравнениях равны левые части, то можно приравнять и правые части. Получаем линейное уравнение с одной неизвестной: $3x_0 - 5 = 1/2x_0$, или $6x_0 - 10 = x_0$, или $5x_0 = 10$, откуда $x_0 = 2$. Из первого уравнения этой системы находим: $y_0 = 3 \cdot 2 - 5 = 6 - 5 = 1$. Итак, первые две прямые пересекаются в точке $A(2;\ 1)$. Подставим найденные значения x_0 и y_0 в третье уравнение данной системы: $1 = a \cdot 2 - 3$ или $1 = 2a - 3$, откуда $a = 2$.

Ответ: $a = 2$.

5. Пусть расстояние между пунктами A и B равно s км, собственная скорость катера (скорость в стоячей воде) равна x км/ч, скорость течения реки – y км/ч. При движении по течению реки скорость катера увеличивается и равна $x + y$ (км/ч). За 4 часа катер, двигаясь с такой скоростью, проходит расстояние $(x + y)4$, равное s. Получаем первое уравнение $4(x + y) = s$. При движении против течения реки скорость катера уменьшается и равна $x - y$ (км/ч). За 6 часов катер, двигаясь с такой скоростью, проходит расстояние $(x - y)6$, равное s. Имеем второе уравнение $6(x - y) = s$.

Получим систему уравнений $\begin{cases} 4(x + y) = s, \\ 6(x - y) = s \end{cases}$ или $\begin{cases} 4x + 4y = s, \\ 6x - 6y = s. \end{cases}$ Особенность этой системы в том, что в нее входят три неизвестных и два уравнения. Поэтому найти эти неизвестные нельзя. Плот может двигаться только со скоростью реки y км/ч. Поэтому способом сложения исключим из этой системы переменную x. Для этого умножим первое уравнение на число 3, второе уравнение – на число (−2). Получаем равносильную систему уравнений $\begin{cases} 12x + 12y = 3s, \\ -12x + 12y = -2s. \end{cases}$ Сложим уравнения системы: $12y + 12y = 3s - 2s$ или $24y = s$. Плот пройдет расстояние s со скоростью y за время $\frac{s}{y} = \frac{24y}{y} = 24$ (ч).

Ответ: 24 ч.

6. Для системы уравнений $\begin{cases} x + ay = a^4, \\ ax + y = a^2 \end{cases}$ запишем условие единственности: $\frac{1}{a} \neq \frac{a}{1}$, или $1 \neq a^2$, откуда $a \neq 1$ и $a \neq -1$. При $a \neq \pm 1$ система имеет единственное решение. Определим число решений системы при $a = -1$ и $a = 1$.

Подставим значение $a = -1$ в данную систему и получим: $\begin{cases} x - y = (-1)^4, \\ -x + y = (-1)^2 \end{cases}$ или $\begin{cases} x - y = 1, \\ -x + y = 1. \end{cases}$ Умножим второе уравнение на число (-1). Получаем равносильную систему уравнений $\begin{cases} x - y = 1, \\ x - y = -1. \end{cases}$ Очевидно, что такая система решений не имеет, т. к. одна и та же величина $x - y$ из первого уравнения равна 1, из второго уравнения равна (-1).

Подставим значение $a = 1$ в данную систему и получим: $\begin{cases} x + y = 1^4, \\ x + y = 1^2 \end{cases}$ или $\begin{cases} x + y = 1, \\ x + y = 1. \end{cases}$ Такая система уравнений имеет бесконечно много решений, т. к. уравнения системы одинаковы.

Ответ: при $a \neq \pm 1$ единственное решение, при $a = -1$ решений нет, при $a = 1$ бесконечно много решений.

Уроки 38–39. Зачет по теме «Системы двух линейных уравнений с двумя переменными»

Цели: сравнение успеваемости учащихся при одинаковой сложности заданий, возможность повышения оценок за выполненные контрольные работы.

Ход уроков

I. Сообщение темы и целей уроков

II. Характеристика зачетной работы

Работа составлена в двух равноценных вариантах. По сравнению с контрольной работой увеличено количество заданий. Соответственно у учащихся возрастает возможность выбора задач. Все задания разбиты на три блока А, В и С. Самые простые задачи находятся в блоке А, более сложные – в блоке В, еще сложнее – в блоке С. Каждая задача из блока А оценивается в 1 балл, из блока В – в 2 балла, из блока С – в 3 балла. Поэтому за правильное решение всех задач блока А можно получить 7 баллов, блока В – 8 баллов и блока С – 9 баллов (всего 24 балла). Оценка «3» ставится за 6 баллов, оценка «4» – за 10 баллов, оценка «5» – за 14 баллов.

Так как эта работа является зачетной, то в нее не включены принципиально новые задачи. Поэтому разбору заданий работы занятия можно и не посвящать (решения задач могут быть вывешены на стенде). Для стендового размещения разбор вариантов приводится.

Вариант 1

А

1. Графическим способом решите систему уравнений $\begin{cases} 2x-3y=5, \\ x-2y=3. \end{cases}$

2. Способом подстановки решите систему уравнений $\begin{cases} 4x-3y=5, \\ x+2y=4. \end{cases}$

3. Способом сложения решите систему уравнений $\begin{cases} -2x+3y=11, \\ 3x+2y=3. \end{cases}$

4. Прямая $y = ax + b$ проходит через точки $A(2; 5)$ и $B(4; 11)$. Найдите числа a и b.

5. Используя графический способ, определите число решений системы уравнений $\begin{cases} |x|-y=0, \\ y-x=1. \end{cases}$

6. При всех значениях параметра a определите число решений системы уравнений $\begin{cases} 2x+ay=4, \\ 4x+3y=2a. \end{cases}$

7. На стоянке стоят 18 машин и велосипедов, у которых вместе 60 колес. Сколько машин и сколько велосипедов находится на стоянке?

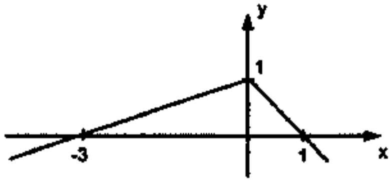
В

8. Способом подстановки решите систему уравнений $\begin{cases} 2x-y=0, \\ x+2-z=0, \\ 3x+2y+z=10. \end{cases}$

9. При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases} 6x+8y=2, \\ 3x+4y=a^2-3 \end{cases}$ не имеет решений?

10. Решите уравнение $(x-1)^2+|2y+x|=0$.

11. Напишите уравнение ломаной, изображенной на рисунке.



С

12. Пусть $(x_0; y_0; z_0)$ – решите систему уравнений $\begin{cases} 2x+3y+4z=3, \\ 4x+2y+3z=7, \\ 2x+3y+z=6. \end{cases}$

Найдите сумму $x_0+y_0+z_0$.

13. Сколько лет брату и сестре, если 4 года назад брат был старше сестры в 5 раз, а через 5 лет брат будет старше сестры в 2 раза?

14. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $A(2; 3)$ и через точку пересечения графиков функций $y=|x|$ и $y=|x-2|$.

Вариант 2

А

1. Графическим способом решите систему уравнений $\begin{cases} 2x-3y=1, \\ x+2y=4. \end{cases}$

2. Способом подстановки решите систему уравнений $\begin{cases} 3x-4y=7, \\ x-2y=3. \end{cases}$

3. Способом сложения решите систему уравнений $\begin{cases} 2x-3y=7, \\ 3x+2y=4. \end{cases}$

4. Прямая $y=ax+b$ проходит через точки $A(1; 3)$ и $B(3; -5)$. Найдите числа a и b.

5. Используя графический способ, определите число решений системы уравнений $\begin{cases} |x|+y=0, \\ x-y=1. \end{cases}$

6. При всех значениях параметра a определите число решений системы уравнений $\begin{cases} 3x-ay=3, \\ 4x-2y=4a. \end{cases}$

7. На стоянке стоят 26 машин и велосипедов, у которых вместе 88 колес. Сколько машин и сколько велосипедов находится на стоянке?

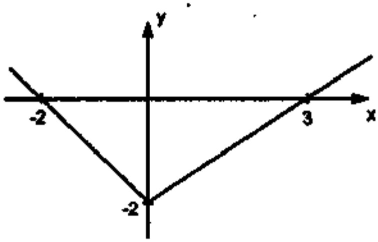
В

8. Способом подстановки решите систему уравнений
$$\begin{cases} x+y-3=0, \\ 2y+z=7, \\ 2x+3y-2z=2. \end{cases}$$

9. При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases} 8x-4y=8, \\ 2x-y=a^2-2 \end{cases}$ не имеет решений?

10. Решите уравнение $(x-3y)^2+|y+2|=0$.

11. Напишите уравнение ломаной, изображенной на рисунке.



С

12. Пусть $(x_0; y_0; z_0)$ – решите систему уравнений $\begin{cases} 3x+4y+2z=8, \\ 2x+4y+6z=7, \\ 4x+y+z=3. \end{cases}$

Найдите сумму $x_0+y_0+z_0$.

13. Сколько лет брату и сестре, если 3 года назад брат был старше сестры в 4 раза, а через 5 лет брат будет старше сестры в 2 раза?

14. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $A(1; 5)$ и через точку пересечения графиков функций $y=|x+2|$ и $y=|x|$.

III. Разбор заданий

Вариант 1

1. *Ответ*: $(1; -1)$.
2. *Ответ*: $(2; 1)$.
3. *Ответ*: $(-1; 3)$.
4. *Ответ*: $a=3$, $b=-1$.
5. *Ответ*: 1 решение.
6. *Ответ*: при $a \neq 1{,}5$ единственное решение; при $a=1{,}5$ решений нет.
7. *Ответ*: 12 машин, 6 велосипедов.

8. *Ответ*: (1; 2; 3).

9. *Ответ*: $a \neq \pm 2$.

10. *Ответ*: (1; −1/2).

11. *Ответ*: $y = \begin{cases} \dfrac{1}{3}x + 1 \text{ при } x < 0, \\ -x + 1 \text{ при } x \geq 0. \end{cases}$

12. В системе уравнений $\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 3, \\ 4x + 2y + 3z = 7, \\ 2x + 3y + z = 6 \end{cases}$ в левые части каждая из переменных входит ровно 8 раз. Поэтому сложим левые и правые части всех трех уравнений. Получаем: $2x + 3y + 4z + 4x + 2y + 3z + 2z + 3y + z = 3 + 7 + 6$, или $8x + 8y + 8z = 16$, или $8(x + y + z) = 16$. Разделим обе части этого равенства на число 8 и найдем: $x + y + z = 2$. Поэтому если $(x_0; y_0; z_0)$ – решение данной системы, то $x_0 + y_0 + z_0 = 2$.

Ответ: 2.

13. Пусть сейчас брату x лет, сестре – y лет; 4 года назад брату было $(x - 4)$ лет, сестре – $(y - 4)$ лет. По условию брат был старше сестры в 5 раз. Поэтому получаем уравнение $x - 4 = 5(y - 4)$. Через 5 лет брату будет $(x + 5)$ лет, сестре – $(y + 5)$ лет. Тогда брат будет в 2 раза старше сестры. Имеем второе уравнение $x + 5 = 2(y + 5)$.

Получили систему уравнений $\begin{cases} x - 4 = 5(y - 4), \\ x + 5 = 2(y + 5) \end{cases}$ или $\begin{cases} x = 5y - 16, \\ x = 2y + 5. \end{cases}$

Так как в уравнениях одинаковые левые части, то приравняем и правые. Получаем линейное уравнение с одной неизвестной: $5y - 16 = 2y + 5$ или $3y = 21$, откуда $y = 7$. Из первого уравнения находим: $x = 5 \cdot 7 - 16 = 35 - 16 = 19$. Итак, сейчас брату 19 лет, сестре – 7 лет.

Ответ: брату 19 лет, сестре 7 лет.

14. Сначала найдем точку пересечения графиков функций $y = |x|$ и $y = |x - 2|$. Для этого построим графики таких функций. Видно, что графики пересекаются в одной точке $B(1; 1)$.

Теперь рассмотрим линейную функцию $y = ax + b$. По условию ее график проходит через точки $A(2; 3)$ и $B(1; 1)$. Поэтому координаты этих точек удовлетворяют уравнению линейной функции. Получаем систему уравнений $\begin{cases} 3 = 2a + b, \\ 1 = a + b. \end{cases}$ Решим эту систему способом подстановки. Из второго уравнения выразим $a = 1 - b$ и подставим в первое уравнение: $3 = 2(1 - b) + b$, или $3 = 2 - 2b + b$, или $1 = -b$, откуда $b = -1$. Используя формулу $a = 1 - b$, найдем $a = 1 - (-1) = 2$. Итак, уравнение данной прямой $y = 2x - 1$.

Ответ: $y = 2x - 1$.

Вариант 2

1. *Ответ*: (2; 1).
2. *Ответ*: (1; −1).
3. *Ответ*: (2; −1).
4. *Ответ*: $a = -4$, $b = 7$.
5. *Ответ*: 1 решение.
6. *Ответ*: при $a \neq 1{,}5$ единственное решение; при $a = 1{,}5$ решений нет.
7. *Ответ*: 18 машин, 8 велосипедов.
8. *Ответ*: (1; 2; 3).
9. *Ответ*: $a \neq \pm 2$.
10. *Ответ*: (−6; −2).
11. *Ответ*: $y = \begin{cases} -x - 2 \text{ при } x < 0, \\ \dfrac{2}{3}x - 2 \text{ при } x \geq 0. \end{cases}$

12. В системе уравнений $\begin{cases} 3x + 4y + 2z = 8, \\ 2x + 4y + 6z = 7, \\ 4x + y + z = 3 \end{cases}$ в левые части каждая из переменных входит ровно 9 раз. Поэтому сложим левые и правые части всех трех уравнений. Получаем: $3x + 4y + 2z + 2x + 4y + 6z + 4x + y + z = 8 + 7 + 3$, или $9x + 9y + 9z = 18$, или $9(x + y + z) = 18$. Разделим обе части этого равенства на число 9 и найдем: $x + y + z = 2$. Поэтому, если $(x_0; y_0; z_0)$ – решение одной системы, то $x_0 + y_0 + z_0 = 2$.

Ответ: 2.

13. Пусть сейчас брату x лет, сестре – y лет; 3 года назад брату было $(x - 3)$ лет, сестре – $(y - 3)$ лет. По условию брат был старше сестры в 4 раза. Поэтому получаем уравнение $x - 3 = 4(y - 3)$. Через 5 лет брату будет $(x + 5)$ лет, сестре – $(y + 5)$ лет. Тогда брат будет в 2 раза старше сестры. Имеем второе уравнение $x + 5 = 2(y + 5)$.

Получили систему уравнений $\begin{cases} x - 3 = 4(y - 3), \\ x + 5 = 2(y + 5) \end{cases}$ или $\begin{cases} x = 4y - 9, \\ x = 2y + 5. \end{cases}$

Так как в уравнениях одинаковые левые части, то приравняем и правые. Получаем линейное уравнение с одной неизвестной: $4y - 9 = 2y + 5$ или $2y = 14$, откуда $y = 7$. Из первого уравнения находим: $x = 4 \cdot 7 - 9 = 28 - 9 = 19$. Итак, сейчас брату 19 лет, сестре – 7 лет.

Ответ: брату 19 лет, сестре 7 лет.

14. Сначала найдем точку пересечения графиков функций $y = |x + 2|$ и $y = |x|$. Для этого построим графики таких функций. Видно, что графики пересекаются в одной точке $B(-1; 1)$.

Теперь рассмотрим линейную функцию $y = ax + b$. По условию ее график проходит через точки $A(1; 5)$ и $B(-1; 1)$. Поэтому координаты этих точек удовлетворяют уравнению линейной функции. Получаем систему уравнений $\begin{cases} 5 = a + b, \\ 1 = -a + b. \end{cases}$ Решим эту систему способом сложения. Сложим уравнения системы и получим: $5 + 1 = b + b$ или $6 = 2b$, откуда $b = 3$. Подставим это значение в первое уравнение системы $5 = a + 3$, откуда $a = 2$. Итак, уравнение данной прямой $y = 2x + 3$.

Ответ: $y = 2x + 3$.

Глава 4. Степень с натуральным показателем и ее свойства

§ 15. Что такое степень с натуральным показателем

Урок 40. Определение степени с натуральным показателем

Цель: развить навыки возведения в степень.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Изучение нового материала

Степенью числа a с натуральным показателем n называется произведение n одинаковых сомножителей a и обозначается символом a^n ($n \geq 2$), т. е. $\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n} = a^n$. Если степень равна единице (т. е. $n = 1$), то a^1 равняется числу a (т. е. $a^1 = a$). **Повторяющийся множитель a называется основанием степени, число** повторяющихся **множителей n – показателем степени.** Степень a^n с основанием a и показателем n читается: a в степени n или n-я степень числа a. Нахождение значения степени называют **возведением в степень.**

Пример 1

а) $3^6 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 729$ (3 в шестой степени или шестая степень числа 3);

б) $0^2 = 0 \cdot 0 = 0$ (0 во второй степени, или 0 в квадрате, или вторая степень числа 0);

в) $(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16$ (−2 в четвертой степени или четвертая степень числа (−2));

г) $\left(-\frac{1}{3}\right)^3 = \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{27}$ ($\left(-\frac{1}{3}\right)$ в третьей степени, или $\left(-\frac{1}{3}\right)$ в кубе, или третья степень числа $\left(-\frac{1}{3}\right)$).

Аналогично можно использовать определение степени числа и в алгебраических выражениях.

Пример 2

а) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (a \cdot a) \cdot (b \cdot b \cdot b \cdot b) = 2^3 a^2 b^4$;

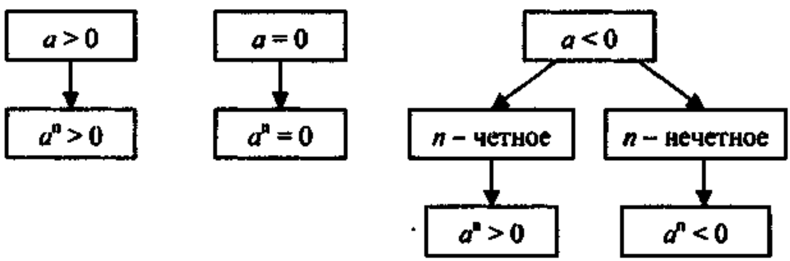
б) $\dfrac{a\cdot a\cdot a}{b\cdot b\cdot b\cdot b\cdot b}=\dfrac{a^3}{b^5}$ (очевидно, $b\neq 0$);

в) $a^2\cdot a^3\cdot a^1=(a\cdot a)\cdot(a\cdot a\cdot a)\cdot a=a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a=a^6$.

В натуральную степень можно возводить любые числа: отрицательные, нуль, положительные. При возведении в степень **положительного числа** получается **положительное число**. При возведении в степень **нуля** получается **нуль**. При возведении в степень **отрицательного числа** может получиться и **отрицательное** и **положительное число**. При этом, если **показатель степени – четное число**, то при возведении в степень получается **положительное число**. Если показатель степени – **нечетное число**, то при возведении в степень получается **отрицательное число** (пример 1).

Действительно, если n – четное число, то произведение четного числа отрицательных множителей положительно. Если n – нечетное число, то произведение нечетного числа отрицательных множителей отрицательно.

Знак степени a^n



Из приведенной таблицы следует, что **при четном показателе n степень числа $a^n\geq 0$ при любом значении a.**

Пример 3

При любых значениях переменных a и b выражения a^2, a^6, $(a-b)^2$, $(2a+3b)^4$ и т.д. принимают только неотрицательные значения.

Понятие степени числа с натуральным показателем позволяет решать более сложные задачи.

Пример 4

Найдем значения выражений:

а) $2\cdot 3^3-2^6+4^2=2\cdot 27-64+16=54-64+16=6$ (учтено, что $3^3=3\cdot 3\cdot 3=27$; $2^6=2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2=64$ и $4^2=4\cdot 4=16$);

б) $\dfrac{3\cdot 5^3-5\cdot 2^6}{4\cdot 3^2+2^4+3}=\dfrac{3\cdot 125-5\cdot 64}{4\cdot 9+16+3}=\dfrac{375-320}{36+16+3}=\dfrac{55}{55}=1$ (учтено, что $5^3=5\cdot 5\cdot 5=125$, $2^6=2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2=64$, $3^2=3\cdot 3=9$ и $2^4=2\cdot 2\cdot 2\cdot 2=16$).

III. Задание на уроке

№ 15.1 (а, г); 15.2 (в); 15.4 (а); 15.9 (б); 15.12 (а, б); 15.13 (б, в); 15.24; 15.26 (а, б); 15.28; 15.32 (а, г); 15.37 (а, в).

IV. Контрольные вопросы

1. Понятие степени с натуральным показателем.
2. Определение основания степени.
3. Определение показателя степени.
4. Какое число получается при возведении положительного числа в степень?
5. Какое число получается при возведении нуля в степень?
6. Какое число получается при возведении отрицательного числа в степень? От чего зависит результат?

V. Задание на дом

№ 15.1 (б); 15.2 (г); 15.5 (б); 15.9 (г); 15.2 (в, г); 15.14 (а, б); 15.25; 15.26 (в, г); 15.29; 15.32 (б, в); 15.37 (б, г).

VI. Подведение итогов урока

§ 16. Таблица основных степеней

Урок 41. Таблица степеней простых чисел

***Цель*:** получить навыки возведения в степень чисел.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).
2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1. Упростите выражение:

а) $2\cdot 2\cdot 2\cdot a\cdot a\cdot b\cdot b\cdot b\cdot b$; б) $3a^2\cdot ab + 5a^3b$.

2. Объем куба равен 64 см^3. Найдите ребро и площадь поверхности куба.

Вариант 2

1. Упростите выражение:

а) $3\cdot3\cdot a\cdot a\cdot a\cdot b\cdot b$; б) $2a\cdot a^2b+4a^3b$.

2. Объем куба равен 216 см^3. Найдите ребро и площадь поверхности куба.

III. Изучение нового материала

При вычислениях полезна таблица умножения (которая постоянно используется). Не менее полезна и **таблица степеней** простых однозначных чисел (в пределах тысячи). В больших пределах такую таблицу тяжело запомнить. Составим ее:

$2^1=2$, $2^2=4$, $2^3=8$, $2^4=16$, $2^5=32$, $2^6=64$, $2^7=128$, $2^8=256$, $2^9=512$, $2^{10}=1024$;

$3^1=3$, $3^2=9$, $3^3=27$, $3^4=81$, $3^5=243$, $3^6=729$;

$5^1=5$, $5^2=25$, $5^3=125$, $5^4=625$;

$7^1=7$, $7^2=49$, $7^3=343$.

Используя таблицу, свойства умножения и определение степени, можно находить и степени составных чисел.

Пример 1

Вычислим 6^4.

Получаем: $6^4=(2\cdot3)^4=(2\cdot3)\cdot(2\cdot3)\cdot(2\cdot3)\cdot(2\cdot3)=(2\cdot2\cdot2\cdot2)\cdot(3\cdot3\cdot3\cdot3)=$ $=2^4\cdot3^4=16\cdot81=1296$.

Пример 2

Сравните числа a и b, если $2^a=512$ и $3^b=729$.

Используя таблицу, легко найти числа $a=9$ и $b=6$. Очевидно, что $a>b$.

Часто приходится возводить в степень числа 1, 0, −1, 10. Для этих чисел таблица степеней имеет вид:

$1^n=1$ для любого n;

$0^n=0$ для любого n;

$$(-1)^n=\begin{cases}1 \text{ для четного } n \text{ (т. е. } n=2, 4, 6, \ldots)\\ -1 \text{ для нечетного } n \text{ (т. е. } n=1, 3, 5, \ldots);\end{cases}$$

$$10^n=1\underbrace{000\ldots0}_{n\text{ нулей}}.$$

Пример 3

Очевидно, что $10^1=10$, $10^2=100$, $10^3=1000$ и, наоборот, $10\,000=10^4$, $100\,000=10^5$ и т. д.

Пример 4

Вычислим: $\dfrac{(-1)^{10}+0^3+1^{15}}{(-1)^{16}+0^2+1^4}+\dfrac{10^2\cdot10^3}{10^4}=\dfrac{1+0+1}{1+0+1}+\dfrac{10^5}{10^4}=1+10=11.$

IV. Задание на уроке

№ 16.5 (а); 16.7 (б); 16.8; 16.10 (а, б); 16.13 (а, в); 16.16; 16.18 (а, б); 16.24 (в, г).

V. Задание на дом

№ 16.5 (б); 16.7 (г); 16.9; 16.11 (а, б); 16.13 (б, г); 16.17; 17.18 (в, г); 16.24 (а, б).

VI. Подведение итогов урока

§ 17. Свойства степени с натуральными показателями

Урок 42. Основные свойства степени

Цель: использовать свойства степени для преобразования выражений.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1. Вычислите выражение $\dfrac{2^3+2^5+1^8+7^2}{3^3-5^2}$.

2. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2^{x+2y}=64, \\ 5^{x-y}=125. \end{cases}$

Вариант 2

1. Вычислите выражение $\dfrac{2^6+(-1)^4+5^2}{2^5-3^3}$.

2. Решите систему уравнений $\begin{cases} 3^{x-y}=81, \\ 2^{2x+y}=32. \end{cases}$

III. Изучение нового материала

Для преобразования числовых и алгебраических выражений, содержащих натуральные степени, надо знать **свойства этих степеней.**

1. **При умножении степеней с одинаковыми основаниями основание остается прежним, а показатели степеней складываются,** т. е. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

Используем определение степени с натуральным показателем и свойства умножения и получим: $a^m \cdot a^n = \underbrace{(a \cdot a \cdot ... \cdot a)}_{m} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot ... \cdot a)}_{n} =$

$= \underbrace{(a \cdot a \cdot ... \cdot a)}_{m+n} = a^{m+n}$. Доказанное свойство выполняется для любого числа множителей.

Пример 1

а) $2^2 \cdot 2^3 = 2^{2+3} = 2^5 = 32$;
б) $3^3 \cdot 3^2 \cdot 3 = 3^{3+2+1} = 3^6 = 729$;
в) $a^5 \cdot a^3 = a^{5+3} = a^8$;
г) $x^4 \cdot x^2 \cdot x^5 = x^{4+2+5} = x^{11}$.

2. **При делении степеней с одинаковыми основаниями основание остается прежним, а показатели степеней вычитаются,** т. е. $a^m : a^n = a^{m-n}$. Очевидно, что $a \neq 0$ (т. к. делить на нуль нельзя) и $m > n$ (степень $m - n$ должна также быть натуральным числом).

Очевидно, что равенство $a^m : a^n = a^{m-n}$ будет доказано, если будет доказано, что произведение a^{m-n} и a^n равно a^m. Используя свойство умножения степеней, получаем: $a^{m-n} \cdot a^n = a^{(m-n)+n} = a^{m-n+n} = a^m$. Тогда по определению частного имеем: $a^m : a^n = a^{m-n}$.

Пример 2

а) $2^5 : 2^3 = 2^{5-3} = 2^2 = 4$;
б) $3^8 : 3^5 = 3^{8-5} = 3^3 = 27$;
в) $a^7 : a^4 = a^{7-4} = a^3$ $(a \neq 0)$;
г) $y^9 : y^4 = y^{9-4} = y^5$ $(y \neq 0)$.

Свойство деления $a^m : a^n = a^{m-n}$ было доказано для случая $m > n$. Будем считать, что такое же свойство справедливо и при $m = n$. Тогда свойство имеет вид $a^m : a^m = a^{m-m} = a^0$. Очевидно, что при $a \neq 0$ и любом натуральном m величина $a^m : a^m = 1$. Поэтому разумно считать, что $a^0 = 1$ при $a \neq 0$.

Итак, степень числа a, не равного нулю, с нулевым показателем равна единице, т. е. $a^0 = 1$ $(a \neq 0)$. Заметим, что если основание равно нулю, то степень с нулевым показателем не определена (не имеет смысла), т. е. **0^0 не имеет смысла.**

Пример 3

а) $2{,}7^0 = 1$;

б) $\left(-6\frac{1}{3}\right)^0 = 1$;

в) 0^0 не имеет смысла;

г) $(3x)^0 = 1$ при $x \neq 0$;

д) $(x - y)^0 = 1$ при $x \neq y$;

е) $(2x + 3y)^0 = 1$ при $2x + 3y \neq 0$.

После введения нулевой степени формулу $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ можно применять и в случае, когда $m = 0$ или $n = 0$, если $a \neq 0$. Формулу $a^m : a^n = a^{m-n}$ можно применить, когда m и n не только натуральные числа, но и нули, если $m \geq n$ и $a \neq 0$. В старших классах будет показано, что свойства умножения и деления степеней выполняются при любых показателях степеней.

Очевидно, что **свойства умножения и деления** можно применять и **совместно**.

Пример 4

а) $2^3 \cdot 2^6 : 2^5 = 2^{3+6-5} = 2^4 = 16$;

б) $2^5 : (2 \cdot 2^2) = 2^5 : 2^{1+2} = 2^5 : 2^3 = 2^{5-3} = 2^2 = 4$;

в) $x^4 \cdot x^3 : x^5 = x^{4+3-5} = x^2$;

г) $\dfrac{y^5 \cdot y^3 \cdot y}{y^4 \cdot y^2} = y^{5+3+1-4-2} = y^3$.

3. При возведении степени числа в степень основание остается тем же, а показатели степени перемножаются, т. е. $(a^m)^n = a^{mn}$ (a – любое число, m и n – натуральные числа).

По определению степени запишем: $(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot \ldots \cdot a^m}_{n}$. По свойству степени это выражение равно: $a^m \cdot a^m \cdot \ldots \cdot a^m = a^{\overbrace{m+m+\ldots+m}^{n}} = a^{mn}$. Итак, доказано свойство $(a^m)^n = a^{mn}$.

Пример 5

а) $(2^2)^3 = 2^{2\cdot3} = 2^6$;

б) $(x^3)^4 = x^{3\cdot4} = x^{12}$.

Три перечисленных свойства позволяют решать достаточно широкий круг задач.

Пример 6

Вычислим выражение $\dfrac{(2^3)^2 \cdot (2^2)^3}{(2^3)^4} = \dfrac{2^{3\cdot2} \cdot 2^{2\cdot3}}{2^{3\cdot4}} = 2^{6+6-12} = 2^0 = 1$.

IV. Задание на уроке

№ 17.1 (а, в); 17.6 (б); 17.9 (а); 17.13 (а, б); 17.14 (б); 17.20 (а, г); 17.24 (а, б); 17.26 (в); 17.32 (б, г); 17.35 (а); 17.40 (в, г).

V. Контрольные вопросы

1. Напишите свойства умножения и деления степеней.

2. Сформулируйте словами свойства умножения и деления степеней.

3. Чему равна степень с нулевым показателем? Для каких оснований степеней?

4. Напишите правило возведения степени в степень и сформулируйте его словами.

VI. Задание на дом

№ 17.1 (б, г); 17.6 (а); 17.9 (б); 17.13 (в, г); 17.14 (а); 17.20 (б, в); 17.24 (в, г); 17.26 (б); 17.32 (а, в); 17.35 (б); 17.40 (а, б).

VII. Творческие задания

1. Определите закономерности и найдите последнюю цифру числа a^n для $a = 1, 2, 3, \ldots, 10$ и натурального n.

Ответ: результаты приведены в таблице. Сверху указано основание a, слева – степень $n = 1, 2, \ldots, 8$. В последней строке указана повторяемость последней цифры. Видно, что при возведении $a = 1$; 5; 6; 10 в любую степень последняя цифра не меняется. При возведении $a = 2$; 3; 7; 8 последняя цифра повторяется при изменении показателя степени на 4. При возведении $a = 4$; 9 последняя цифра повторяется при изменении показателя степени на 2.

n \ a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
2	1	4	9	6	5	6	9	4	1	0
3	1	8	7	4	5	6	3	2	9	0
4	1	6	1	6	5	6	1	6	1	0
5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
6	1	4	9	6	5	6	9	4	1	0
7	1	8	7	4	5	6	3	2	9	0
8	1	6	1	6	5	6	1	6	1	0
		4	4	2			4	4	2	

2. Используя результаты предыдущей задачи (см. таблицу), найдите последнюю цифру числа:

а) 2004^{2004}; б) 1936^{537}; в) 5867^{1993}; г) 2435^{183}; д) 3648^{1734}.

Ответ: а) 6 (последняя цифра основания 4, показатель степени 2004 кратен 4);

б) 6 (последняя цифра основания 6, число 6 в любой степени оканчивается на 6);

в) 7 (последняя цифра основания 7, показатель 1993 при делении на 4 дает остаток 1, т. е. $1993 = 4 \cdot 498+1$);

г) 5 (последняя цифра основания 5, число 5 в любой степени оканчивается на 5);

д) 4 (последняя цифра основания 8, показатель степени 1734 при делении на 4 дает остаток 2, т. е. $1734 = 4 \cdot 433 + 2$).

3. Найдите последнюю цифру числа:

а) $1536^{937} - 355^{386} + 121^{536}$;

б) $310^{636} + 3 \cdot 531^{196} + 786^{374}$;

в) $734^{1531} + 2 \cdot 631^{324} + 389^{678}$;

г) $1743^{651} - 3 \cdot 135^{163} + 4 \cdot 647^{174}$.

Ответ: а) 2 (1536^{937} оканчивается на 6, 355^{386} – на 5, 121^{536}– на 1, и данное число оканчивается на $6 - 5 + 1 = 2$);

б) 9 (310^{636} оканчивается на 0, 531^{196} – на 1, $3 \cdot 531^{196}$ – на 3, 786^{374} – на 6, и данное число оканчивается на $0 + 3 + 6 = 9$);

в) 7 (734^{1531} оканчивается на 4, 631^{324} – на 1, $2 \cdot 631^{324}$ – на 2, 389^{678} – на 1, и данное число оканчивается на $4 + 2 + 1 = 7$);

г) 8 (1743^{651} оканчивается на 7, 135^{163} – на 5, $3 \cdot 135^{163}$ – на 5, 647^{174} – на 9, $4 \cdot 647^{174}$ – на 6, и данное число оканчивается на $7 - 5 + 6 = 8$).

4. Определите, является ли число простым или составным:

а) $537^{1994} - 3$;

б) $735^{1937} - 1$;

в) $736^{354} - 1$;

г) $846^{175} - 6$;

д) $537^{1981} - 389^{196}$;

е) $746^{432} - 371$.

Ответ: все числа составные.

VIII. Подведение итогов урока

§ 18. Умножение и деление степеней с одинаковыми показателями

Урок 43. Возведение в степень произведения и частного чисел

Цель: рассмотреть свойства возведения в степень произведения и частного чисел.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Напишите и сформулируйте свойство умножения степеней с одинаковыми основаниями.

2. Выполните действия со степенями:

а) $3^5 \cdot 3^{13} : 3^{16}$;

б) $(3^4)^3 : 3^{11}$;

в) $\dfrac{a^7 \cdot a^9}{a^{10} \cdot a^5}$.

Вариант 2

1. Напишите и сформулируйте свойство деления степеней с одинаковыми основаниями.

2. Выполните действия со степенями:

а) $2^5 \cdot 2^{11} : 2^9$;

б) $(2^3)^4 : 2^{10}$;

в) $\dfrac{a^6 \cdot a^8}{a^7 \cdot a^3}$.

III. Изучение нового материала

1. **При возведении в степень произведения чисел каждое число возводится в эту степень и результаты перемножаются, т. е.** $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ (a и b – любые числа, n – натуральное число).

По определению степени запишем: $(ab)^n = \underbrace{(ab)\cdot(ab)\cdot\ldots\cdot(ab)}_{n}$. Сгруппировав отдельно множители a и b, получаем: $\underbrace{(ab)\cdot(ab)\cdot\ldots\cdot(ab)}_{n} = \underbrace{(a\cdot a\cdot\ldots\cdot a)}_{n}\cdot\underbrace{(b\cdot b\cdot\ldots\cdot b)}_{n}$. Используя определение степени, запишем: $\underbrace{(a\cdot a\cdot\ldots\cdot a)}_{n}\cdot\underbrace{(b\cdot b\cdot\ldots\cdot b)}_{n} = a^n\cdot b^n$. Следовательно, доказано свойство $(ab)^n = a^n\cdot b^n$.

Разумеется, это свойство можно использовать при умножении любого числа множителей.

Пример 1

а) $6^3 = (2\cdot3)^3 = 2^3\cdot3^3$;
б) $60^2 = (3\cdot4\cdot5)^2 = 3^2\cdot4^2\cdot5^2$;
в) $(ab)^4 = a^4b^4$;
г) $(2xyz)^3 = 2^3x^3y^3z^3 = 8x^3y^3z^3$.

2. При возведении в степень дроби ее числитель и знаменатель возводятся в эту степень, т. е. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ (где $b \neq 0$).

Учитывая определение степени, запишем: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\ldots\cdot\frac{a}{b}}_{n} = \frac{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}{\underbrace{b\cdot b\cdot\ldots\cdot b}_{n}} = \frac{a^n}{b^n}$. Таким образом, доказано свойство.

Пример 2

а) $\frac{3^6}{6^6} = \left(\frac{3}{6}\right)^6 = \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}$;

б) $\frac{3^4\cdot4^4}{12^3} = \frac{(3\cdot4)^4}{12^3} = \frac{12^4}{12^3} = 12$;

в) $\left(\frac{2a}{3b}\right)^2 = \frac{2^2a^2}{3^2b^2} = \frac{4a^2}{9b^2}$;

г) $\frac{(2a)^2\cdot(3a^2)^3}{(4a)^2\cdot(3a)^2} = \frac{2^2a^2\cdot3^3a^6}{4^2a^2\cdot3^2a^2} = \frac{2^2\cdot3^3a^8}{2^4\cdot3^2a^4} = \frac{3}{2^2}a^4 = \frac{3}{4}a^4$.

Пример 3

Решим уравнение $\frac{(2x)^3\cdot3x^2}{6^2x^4} = -2$.

Упростим левую часть уравнения: $\frac{(2x)^3\cdot 3x^2}{6^2x^4}=\frac{2^3x^3\cdot 3x^2}{2^2\cdot 3^2x^4}=\frac{2x}{3}$. Получили уравнение $\frac{2x}{3}=-2$. Умножим обе его части на $\frac{3}{2}$ и найдем: $x=-3$.

IV. Задание на уроке

№ 18.2 (а, в); 18.6 (а, б); 18.9 (а, в); 18.12 (б, г); 18.14 9а, в); 18.16 (б); 18.18 (а, г); 18.19 (а, б); 18.22 (а, г); 18.24 (а).

V. Контрольные вопросы

1. Сформулируйте и напишите свойство умножения степеней с одинаковыми показателями.

2. Сформулируйте и напишите свойство деления степеней с одинаковыми показателями.

VI. Задание на дом

№ 18.2 (б, г); 18.6 (в, г); 18.9 (б); 18.12 (а, б); 18.14 (б, г); 18.16 (а); 18.18 (б, в); 18.19 (в, г); 18.22 (б, в); 18.24 (б).

VII. Творческие задания

1. Какое из данных чисел больше?
   а) $(324^4)^{25}$ и $(324^{10})^{10}$;
   б) $(15^6)^8$ и $(15^{10})^4$;
   в) $(613^7)^4$ и $(613^5)^6$;
   г) 512^4и $(-512)^4$;
   д) $(-316)^7$ и $(-316)^8$;
   е) $(-316^2)^3$ и $(-316)^6$.
2. Сравните данные числа:
   а) $(2^3)^4$ и $(3^2)^6$;
   б) $(3^3)^{15}$ и $(2^5)^9$;
   в) $(3^3)^5$ и $(2^5)^6$;
   г) $(2^4)^{17}$ и $(4^2)^{17}$;
   д) $(3^4)^{183}$ и $(4^3)^{183}$.
3. Определите последнюю цифру числа:
   а) $(193^3)^7$;
   б) $(397^6)^5$;
   в) $(124^5)^4$;
   г) $(512^5)^7$.
4. Упростите выражение:
   а) $2+2+2^2+2^3+\ldots+2^{16}$;
   б) $2^{14}+2^{14}+2^{15}+2^{16}+\ldots+2^{34}$.

Ответ: а) 2^{17} (заметьте: $2+2=2^2$, $2^2+2^2=2^3$ и т. д. до последнего слагаемого); б) 2^{35} (заметьте: $2^{14}+2^{14}=2\cdot 2^{14}=2^{15}$, $2^{15}+2^{15}=2^{16}$ и т. д. до последнего слагаемого).

5. Вычислите:

а) $(-1)^1 \cdot (-1)^2 \cdot \ldots \cdot (-1)^{50}$;

б) $(-1)^1 + (-1)^2 + \ldots + (-1)^{50}$.

Ответ: а) -1; б) 0 (заметьте: 25 степеней с нечетными показателями степени и 25 степеней с четными показателями степени).

6. Решите уравнение:

а) $2^x = 64$;

б) $3^{x-5} = 81$;

в) $2^3 \cdot 2^{x-7} = 16$;

г) $3^{2x-1} \cdot 3^{x+1} = 27$;

д) $(3^{x-1})^2 = 81$;

е) $(2^3)^{x-1} = 512$.

Ответ: а) $x = 6$; б) $x = 9$; в) $x = 8$; г) $x = 1$; д) $x = 3$; е) $x = 4$.

VIII. Подведение итогов урока

§ 19. Степень с нулевым показателем

Урок 44. Понятие степени с нулевым показателем

Цель: еще раз напомнить свойства степеней с натуральным показателем и ввести понятие степени с нулевым показателем.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Сформулируйте и напишите свойство умножения степеней с одинаковыми показателями.

2. Упростите выражение $\dfrac{(2ab^2)^2 \cdot 3ab}{4(ab)^2}$.

3. Решите уравнение $\dfrac{(2x)^3\cdot(3x)^2}{(2x^2)^3}=1.$

Вариант 2

1. Сформулируйте и напишите свойство деления степеней с одинаковыми показателями.

2. Упростите выражение $\dfrac{(3a^2b)^2\cdot 2ab^2}{9(ab)^3}.$

3. Решите уравнение $\dfrac{(3x^2)^2\cdot(2x)^2}{(2x^2)^2\cdot x}=2.$

III. Изучение нового материала

Еще раз напомним **основные свойства степеней**, которые были рассмотрены и доказаны в двух предыдущих параграфах:

1) $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$; 2) $a^m:a^n=a^{m-n}$; 3) $(a^m)^n=a^{mn}$; 4) $(ab)^n=a^nb^n$; 5) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n}.$

Заметим, что формулы 1) – 5) используются как **слева направо**, так и **справа налево**. **Путать** эти формулы **нельзя**. В формулах 1) – 3) **одинаковое основание** a и **разные показатели степени**. В формулах 4) – 5), наоборот, **основания** a и b **различные**, но **одинаковый показатель** степени n.

Помимо общего определения степени с натуральным показателем $a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n}$, его нужно уточнить для $n=1$ и $n=0$. Разумно считать, что $a^1=a$. Чтобы не противоречить формуле 2) при $m=n$ положим, что $a^0=1$ (при $a\neq 0$).

IV. Задание на уроке

№ 19.1 (а, б); 19.3 (а, в); 19.5 (а, б); 19.7 (в, г); 19.8 (в); 19.9 (б, г); 19.10 (а, б); 19.11 (а, в); 19.12 (б).

V. Контрольные вопросы

1. Запишите основные свойства степеней с натуральными показателями.

2. Чему равны степени a^0 и a^1?

VI. Задание на дом

№ 19.2 (а, б); 19.4 (а, в); 19.6 (б, в); 19.8 (г); 19.9 (а, в); 19.10 (в, г); 19.11 (б, г); 19.12 (г).

VII. Подведение итогов урока

Уроки 45–46. Контрольная работа № 4 по теме «Степень с натуральным показателем и ее свойства»

Цель: проверка знаний учащихся с использованием разноуровневых вариантов.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Характеристика контрольной работы

Контрольная работа составлена в шести вариантах различной сложности (варианты 1, 2 – самые простые, варианты 3, 4 – средней сложности, варианты 5, 6 – самые сложные). При этом сложность вариантов нарастает не очень резко. Каждый вариант содержит шесть задач примерно одинаковой сложности (могут быть несколько сложнее две последние задачи).

При проверке вариантов 1, 2 оценка «5» ставится за правильное решение пяти задач, оценка «4» – четырех задач и оценка «3» – трех задач. Одна задача является резервной (или запасной) и дает некоторую возможность выбора учащимся. При таких же критериях оценки в случае вариантов 3, 4 дается дополнительно 0,5 балла и в случае вариантов 5, 6 – дополнительно 1,0 балл (учитывая более высокую сложность этих вариантов). Поэтому в случае вариантов 5, 6 оценку «5» можно получить за правильное решение четырех задач.

Выбор вариантов может быть сделан учителем или учащимся (при этом число экземпляров вариантов должно быть достаточным). Разумеется, учащиеся должны знать о различной сложности вариантов и критериях оценки контрольной работы.

III. Варианты работы

Вариант 1

1. Вычислите: $\dfrac{\left(\dfrac{4}{3}\right)^2 \cdot 0{,}5^2}{\left(\dfrac{2}{9}\right)^3}$.

2. Выполните действия:

а) $a^3 \cdot a^6$; б) $a^7 : a^5$;

в) $(a^2)^4$; г) $(a^2b)^3$.

3. Упростите выражение:

а) $3x^3y \cdot (-2xy^2)$; б) $(4a^5b^3)^2 : (-8a^7b^4)$.

4. Запишите число $7 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 1$.

5. Решите уравнение:

а) $\dfrac{x^{17} \cdot x^{24}}{x^{18} \cdot x^{22}} = 19$; б) $\dfrac{3^x \cdot 27}{3^4} = 3$.

6. Докажите, что число $10^{48} - 4$ делится на 3.

Вариант 2

1. Вычислите: $\dfrac{\left(\dfrac{9}{3}\right)^3 \cdot 1{,}8}{\left(\dfrac{9}{5}\right)^2}$.

2. Выполните действия:

а) $a^4 \cdot a^5$; б) $a^9 : a^6$;

в) $(a^4)^2$; г) $(a^3b^2)^2$.

3. Упростите выражение:

а) $5x^2y^2 \cdot (-3xy)$; б) $-8a^7b^5 : (-2a^3b^2)^2$.

4. Запишите число $2 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 4$.

5. Решите уравнение:

а) $\dfrac{x^{35} \cdot x^{29}}{x^{42} \cdot x^{21}} = 21$; б) $\dfrac{2^x \cdot 32}{2^6} = 4$.

6. Докажите, что число $10^{28} - 7$ делится на 3.

Вариант 3

1. Вычислите: $\dfrac{\left(1\dfrac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^3}{\left(2\dfrac{2}{3}\right)^2}$.

2. Выполните действия:

а) $3a^2 \cdot 5a^3 \cdot 2a^4$; б) $a^{18} : a^6$;

в) $(a^5)^3 \cdot (a^2)^4$; г) $\dfrac{a^2b \cdot (ab^2)^2}{a^3b^4}$.

3. Упростите выражение:

а) $2(xy^2)^2 \cdot (-2x^2y^3)^3$; б) $(2a^3b^2)^3 : (-3ab)^2$.

4. Сравните числа 2^{30} и 3^{20}.

5. Решите уравнение:

а) $\dfrac{(x^8)^3 \cdot (x^2)^5}{(x^4)^5 \cdot x^{13}} = 19$; б) $\dfrac{(2^x)^2 \cdot 2^7}{2^5} = 16^2$.

6. Докажите, что число $196^{374} + 391^{164} - 2$ делится на 5.

Вариант 4

1. Вычислите: $\dfrac{\left(1\frac{1}{3}\right)^2 \cdot 1{,}5^3}{5\frac{1}{3}}$.

2. Выполните действия:

а) $2a^2 \cdot 3a^2 \cdot 4a^5$; б) $a^{15} : a^5$;

в) $(a^3)^4 \cdot (a^3)^2$; г) $\dfrac{a^3b^2 \cdot (a^2b)^3}{a^5b^3}$.

3. Упростите выражение:

а) $3(yx^2)^3 \cdot (-3x^2y)^2$; б) $(3a^2b^3)^3 : (-2a^2b^4)^2$.

4. Сравните числа 3^{40} и 4^{30}.

5. Решите уравнение:

а) $\dfrac{(x^7)^2 \cdot (x^3)^4}{(x^4)^5 \cdot x^5} = 21$; б) $\dfrac{(3^x)^3 \cdot 3^5}{3^2} = 27^2$.

6. Докажите, что число $171^{356} + 375^{164} + 4$ делится на 5.

Вариант 5

1. Вычислите: $\dfrac{5(3 \cdot 7^{15} - 19 \cdot 7^{14})}{7^{16} + 3 \cdot 7^{15}}$.

2. Упростите выражение:

а) $(a(a^2)^2 \cdot (a^3)^3)^2$; б) $\dfrac{(2x^2y^2)^3 \cdot (-3y)^2}{yx^2 \cdot (-5y^2x)^2}$.

3. Сравните числа 7^{80} и 4^{120}.

4. Определите последнюю цифру числа $(389)^{162} + (635)^{236}$.

5. Решите уравнение $(2x)^2 \cdot 2^{x+5} = 2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot \ldots \cdot 2^9 \cdot 32$.

6. Докажите, что число $10^{316} + 6$ не делится на число $10^{19} - 1$.

Вариант 6

1. Вычислите: $\dfrac{3 \cdot 5^{15} - 4 \cdot 5^{14}}{5^{16} + 6 \cdot 5^{15}}$.

2. Упростите выражение:

а) $(a(a^3)^2 \cdot (a^2)^3)^2$; б) $\dfrac{(3x^2y)^4 \cdot (-2y^2)^2}{y^3x^2 \cdot (-5y^2x^3)^2}$.

3. Сравните числа 9^{60} и 4^{90}.

4. Определите последнюю цифру числа $(289)^{364} + (536)^{171}$.

5. Решите уравнение $(3x)^3 \cdot 3^{4+x} = 3 \cdot 3^2 \cdot 3^3 \cdot \ldots \cdot 3^{11} \cdot 9$.

6. Докажите, что число $10^{273} + 7$ не делится на число $10^{17} - 1$.

Урок 47. Итоги контрольной работы

Цели: **сообщить результаты работы, рассмотреть наиболее типичные ошибки, разобрать трудные задачи.**

Ход урока

I. Сообщение темы и целей урока

II. Итоги контрольной работы

1. Распределение работ по вариантам и результаты решения.

Данные о результатах работы удобно заносить в таблицу (для каждой пары вариантов).

№ задачи / Итоги	1	2	3	...	6
+	5				
±	1				
—	1				
Ø	1				

Обозначения:

+ – число решивших задачу правильно или почти правильно;
± – число решивших задачу со значительными погрешностями;
— – число не решивших задачу;
Ø – число не решавших задачу.

2. Типичные ошибки, возникшие при решении задач.

3. Наиболее трудные задачи и их разбор (учителем или школьниками, сделавшими эту задачу).

4. Разбор всей контрольной работы (вывесить на стенде ответы к заданиям вариантов и разбор наиболее трудных вариантов).

III. Ответы и решения

Ответы

Вариант 1

1. *Ответ*: 40,5.
2. *Ответ*: а) a^9; б) a^2; в) a^8; г) a^6b^3.
3. *Ответ*: а) $-6x^4y^3$; б) $-2a^3b^2$.
4. *Ответ*: 7431.
5. *Ответ*: а) $x = 19$; б) $x = 2$.
6. *Ответ*: доказано.

Вариант 2

1. *Ответ*: 11,25.
2. *Ответ*: а) a^9; б) a^3; в) a^8; г) a^6b^4.
3. *Ответ*: а) $-15x^3y^3$; б) $-2ab$.

4. *Ответ*: 2574.
5. *Ответ*: а) $x = 21$; б) $x = 3$.
6. *Ответ*: доказано.

Вариант 3

1. *Ответ*: $\frac{2}{27}$.
2. *Ответ*: а) $30a^9$; б) a^{12}; в) a^{23}; г) ab.
3. *Ответ*: а) $-16x^8y^{13}$; б) $\frac{8}{9}a^7b^4$.
4. *Ответ*: $2^{30} < 3^{20}$.
5. *Ответ*: а) $x = 19$; б) $x = 3$.
6. *Ответ*: доказано.

Вариант 4

1. *Ответ*: $\frac{27}{8}$.
2. *Ответ*: а) $24a^{10}$; б) a^{10}; в) a^{18}; г) a^4b^2.
3. *Ответ*: а) $27x^{10}y^5$; б) $\frac{27}{4}a^2b$.
4. *Ответ*: $3^{40} > 4^{30}$.
5. *Ответ*: а) $x = 21$; б) $x = 1$.
6. *Ответ*: доказано.

Решения

Вариант 5

1. В числителе вынесем за скобки общий множитель 7^{14}, в знаменателе – 7^{15} и сократим дробь. Получаем: $\frac{5(3\cdot 7^{15}-19\cdot 7^{14})}{7^{16}+3\cdot 7^{15}} =$

$$=\frac{5\cdot 7^{14}(3\cdot 7-19)}{7^{15}(7+3)}=\frac{5\cdot 7^{14}\cdot 2}{7^{15}\cdot 10}=\frac{1}{7}.$$

Ответ: $\frac{1}{7}$.

2. Используем правила действий со степенями и получим:

а) $(a(a^2)^2\cdot(a^3)^3)^2=(a\cdot a^4\cdot a^9)^2=(a^{14})^2=a^{28}$;

б) $\frac{(2x^2y^2)^3\cdot(-3y)^2}{yx^2\cdot(-5y^2x)^2}=\frac{8x^4y^6\cdot 9y^2}{x^2y\cdot 25x^2y^4}=\frac{(8\cdot 9)\cdot x^4(y^6\cdot y^2)}{25\cdot(x^2\cdot x^2)\cdot(y\cdot y^4)}=$

$$=\frac{72x^4y^8}{25x^4y^5}=\frac{72}{25}y^3.$$

Ответ: а) a^{28}; б) $\frac{72}{25}y^3$.

3. Запишем данные числа 7^{80} и 4^{120} в другом виде: $7^{80} = (7^2)^{40} = 49^{40}$ и $4^{120} = (4^3)^{40} = 64^{40}$. Так как $49 < 64$, то и $49^{40} < 64^{40}$ или $7^{80} < 4^{120}$.

Ответ: $7^{80} < 4^{120}$.

4. Запишем данное число в виде $(389)^{162} + (635)^{236} = (389^2)^{81} + (635)^{236}$. Число 389 оканчивается цифрой 9. При возведении в квадрат 389 число 389^2 оканчивается цифрой 1. Если число оканчивается цифрой 1 и 5, то при возведении таких чисел в любую степень число также будет оканчиваться цифрой 1 и 5. Поэтому последняя цифра данного числа $1 + 5 = 6$.

Ответ: 6.

5. Используя свойства степеней, преобразуем данное уравнение: $(2x)^2 \cdot 2^{x+5} = 2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot ... \cdot 2^9 \cdot 32$ или $2^{2x} \cdot 2^{x+5} = 2^{1+2+...+9} \cdot 2^5$. Найдем сумму чисел $1 + 2 + ... + 9 = (1 + 9) + (2 + 8) + (3 + 7) + (4 + 6) + 5 = 4 \cdot 10 + 5 = 45$. Тогда уравнение имеет вид: $2^{2x+x+5} = 2^{45} \cdot 2^5$ или $2^{3x+5} = 2^{50}$. Так как равны степени с одинаковым основанием 2, то равны показатели степеней: $3x + 5 = 50$ или $3x = 45$, откуда $x = 15$.

Ответ: $x = 15$.

6. Рассмотрим число $10^{316} + 6$. Число 10^{316} состоит из единицы и 316 нулей. Тогда число $10^{316} + 6$ имеет вид $1\underbrace{00...0}_{315}6$. Сумма цифр этого числа равна 7, и по признаку делимости оно не делится на 9. Число 10^{19} состоит из единицы и 19 нулей. Поэтому число $10^{19} - 1$ состоит из 19 девяток (т. е. $\underbrace{99...9}_{19}$) и делится на 9. Так как первое число $10^{316} + 6$ не имеет делителя 9, то оно не может без остатка делиться на второе число $10^{19} - 1$.

Ответ: доказано.

Вариант 6

1. В числителе вынесем за скобки общий множитель 5^{14}, в знаменателе – 5^{15} и сократим дробь. Получаем: $\dfrac{3 \cdot 5^{15} - 4 \cdot 5^{14}}{5^{16} + 6 \cdot 5^{15}} = \dfrac{5^{14}(3 \cdot 5 - 4)}{5^{15}(5 + 6)} = \dfrac{5^{14} \cdot 11}{5^{15} \cdot 11} = \dfrac{1}{5}$.

Ответ: $\dfrac{1}{5}$.

2. Используя правила действий со степенями, запишем одночлен в стандартном виде:

а) $(a(a^3)^2 \cdot (a^2)^3)^2 = (a \cdot a^6 \cdot a^6)^2 = (a^{1+6+6})^2 = (a^{13})^2 = a^{26}$;

б) $\dfrac{(3x^2y)^4\cdot(-2y^2)^2}{y^3x^2\cdot(-3y^2x^3)^2}=\dfrac{(9x^8y^4)\cdot(4y^4)}{y^3x^2\cdot(25y^4x^6)}=\dfrac{(9\cdot4)\cdot x^8(y^4\cdot y^4)}{25\cdot(x^2\cdot x^6)\cdot(y^3\cdot y^4)}=$

$=\dfrac{36x^8y^8}{25x^8y^7}=\dfrac{36}{25}x^{8-8}\cdot y^{8-7}=\dfrac{36}{25}y.$

Ответ: а) a^{26}; б) $\dfrac{36}{25}y$.

3. Данные числа 9^{60} и 4^{90} запишем в виде чисел с одинаковыми показателями степени: $9^{60}=(9^2)^{30}=81^{30}$ и $4^{90}=(4^3)^{30}=64^{30}$. Так как $81>64$, то и $81^{30}>64^{30}$ или $9^{60}>4^{90}$.

Ответ: $9^{60}>4^{90}$.

4. Запишем данное число в виде $(289)^{364}+(536)^{171}=(289^2)^{182}+$ $+(536)^{171}$. Число 289 оканчивается цифрой 9. При возведении в квадрат 289 число 289^2 оканчивается цифрой 1. При возведении такого числа в любую степень $(289^2)^{182}$ оно будет также оканчиваться цифрой 1. Число 536 оканчивается цифрой 6. При возведении такого числа в любую степень $(536)^{171}$ оно будет также оканчиваться цифрой 6. Поэтому данное число оканчивается цифрой $1+6=7$.

Ответ: 7.

5. Используя свойства степеней, преобразуем данное уравненис. Получаем: $(3^x)^3\cdot3^{4+x}=3\cdot3^2\cdot3^3\cdot\ldots\cdot3^{11}\cdot9$ или $3^{3x}\cdot3^{4+x}=3^{1+2+3+\ldots+11}\cdot3^2$. Найдем сумму чисел $1+2+3+\ldots+11=(1+11)+(2+11)+$ $+(3+11)+(4+11)+(5+11)+6=12+12+12+12+12+6=$ $=12\cdot5+6=60+6=66$. Тогда уравнение имеет вид $3^{3x+4+x}=$ $=3^{66}\cdot3^2$ или $3^{4x+4}=3^{68}$. Так как равны степени с одинаковым основанием 3, то равны показатели степеней: $4x+4=68$ или $4x=64$, откуда $x=16$.

Ответ: $x=16$.

6. Число 10^{273} состоит из одной единицы и 273 нулей. Тогда число $10^{273}+7$ состоит из одной единицы, 272 нулей и цифры 7, т. е. имеет вид $\underbrace{100\ldots0}_{272}7$. Сумма цифр этого числа равна 8, и такое число по признаку делимости не делится на 9. Число 10^{19} состоит из единицы и 19 нулей. Поэтому число $10^{19}-1$ состоит из 19 цифр 9, т. е. имеет вид $\underbrace{99\ldots9}_{19}$. Очевидно, что такое число делится на 9, т. к. каждая цифра числа делится на 9. Следовательно, число $10^{273}+7$ не делится на число $10^{17}-1$ без остатка, т. к. не имеет делителя 9.

Ответ: доказано.

Глава 5. Одночлены. Арифметические операции над одночленами

§ 20. Понятие одночлена. Стандартный вид одночлена

Урок 48. Одночлен и его стандартный вид

Цель: ознакомить с понятием одночлена, его стандартным видом, определить степень одночлена, вычислить значение одночлена.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Изучение нового материала

Алгебраическое выражение, состоящее из произведения числовых и буквенных множителей или их натуральных степеней, называется одночленом.

Пример 1

а) Выражения $-3\cdot a^2\cdot b^3\cdot c^5$ и $-7\cdot a\cdot b\cdot(-0{,}5\cdot a^2\cdot c^3)\cdot a\cdot b^5$ являются одночленами, т. к. состоят только из произведений числовых и буквенных множителей и их степеней.

б) Выражение $\dfrac{a}{3}\cdot b^2\cdot c^4$ также является одночленом, т. к. может быть записано в виде $\dfrac{1}{3}\cdot a\cdot b^2\cdot c^4$ и тоже состоит только из произведения числового множителя $\dfrac{1}{3}$ и буквенных множителей в соответствующих степенях: a, b^2, c^4.

в) Выражение $a^3 - b^2$ не является одночленом, т. к. содержит операцию вычитания выражений a^3 и b^2.

г) Выражение $a^3 : b - a\cdot b^2$ также не является одночленом, т. к. содержит операцию деления выражений a^3 и b и операцию вычитания выражений $a^3 : b$ и $a\cdot b^2$. **Заметим, что числа, переменные и их степени считаются одночленами.**

Пример 2

Выражения 7,3; $(-5{,}1)^2$; x; y^4 – одночлены.

Стандартным видом одночлена называется такая его форма, при которой **первым сомножителем является числовой множитель**, а

буквенные множители расположены в **алфавитном порядке** и имеют соответствующие **показатели степени**. При этом **числовой множитель** называется **коэффициентом одночлена**.

Пример 3

а) Коэффициент одночлена $3 \cdot a^2 \cdot b^3$ равен 3;

б) коэффициент одночлена $-6{,}8\ x \cdot y^2 \cdot z^4$ равен $-6{,}8$;

в) коэффициент одночлена $a^3 \cdot b^2 \cdot c$ равен 1;

г) коэффициент одночлена $-a^2 \cdot b \cdot c^3$ равен -1.

Пример 4

Стандартный вид одночлена $A = -3 \cdot a^2 \cdot b \cdot (4 \cdot a^3 \cdot b^2 \cdot c) \cdot (-0{,}125 \cdot a \cdot b \cdot c^3)$ есть одночлен $1{,}5 \cdot a^6 \cdot b^4 \cdot c^4$, т. к. выполнив умножение в данном одночлене, получим: $A = (-3 \cdot 4 \cdot (-0{,}125)) \cdot (a^2 \cdot a^3 \cdot a) \cdot (b \cdot b^2 \cdot b) \cdot (c \cdot c^3) = 1{,}5 \cdot a^6 \cdot b^4 \cdot c^4$. При этом множитель 1,5 называют коэффициентом одночлена. Заметим, что любая другая форма одночлена не является его стандартным видом:

а) $A = 1{,}5 \cdot b^4 \cdot a^6 \cdot c^4$, т. к. множители a, b, c расположены не в алфавитном порядке;

б) $A = a^6 \cdot b^4 \cdot c^4 \cdot 1{,}5$, т. к. числовой множитель 1,5 находится не на первом месте;

в) $A = 1{,}5 \cdot a^2 \cdot a^4 \cdot b^4 \cdot c^4$, т. к. не перемножены выражения a^2 и a^4.

Можно провести некоторую аналогию между стандартным видом одночлена и разложением числа на простые множители: в обоих случаях **каждый множитель** должен располагаться **строго на своем месте**.

Степенью одночлена называется **сумма показателей степеней** всех входящих в него **переменных**. Если одночлен не содержит переменных (т. е. является числом), то его **степень** считают **равной нулю**.

Пример 5

а) Степень одночленов 3,1; $-\dfrac{8}{3}$; 4 равна нулю;

б) степень одночленов $3 \cdot a \cdot b^2 \cdot c^3$; $-2 \cdot x^6$; $\dfrac{6}{7} \cdot x^2 \cdot y^2 \cdot z^2$ равна 6;

в) степень одночленов $2{,}4 \cdot a^8$; $-3{,}7 \cdot a^5 \cdot b^3$; $-6{,}4 \cdot a^2 \cdot b^3 \cdot c \cdot d^2$ равна 8.

Чтобы вычислить значение одночлена, надо подставить значения переменных в одночлен и выполнить действия.

Пример 6

Найдем значение одночлена $3a^2bc^3$ при $a = 5$, $b = 3$, $c = 2$.

Подставим значения переменных в одночлен и найдем значение числового выражения. Получаем: $3 \cdot 5^2 \cdot 3 \cdot 2^3 = 3 \cdot 25 \cdot 3 \cdot 8 = 1800$.

III. Задание на уроке

№ 20.1; 20.3; 20.5 (а, в); 20.7 (б); 20.8 (а); 20.14 (а, г); 20.16 (а); 20.17.

IV. Контрольные вопросы

1. Какое выражение называется одночленом? Приведите примеры.

2. Какая форма одночлена называется стандартным видом одночлена? Приведите примеры.

3. Что называется коэффициентом одночлена?

4. Как определить степень одночлена?

5. Как вычислить значение одночлена?

V. Задание на дом

№ 20.4; 20.5 (б, г); 20.7 (г); 20.8 (в); 20.15 (б, в); 20.16 (б); 20.18.

VI. Подведение итогов урока

§ 21. Сложение и вычитание одночленов

Уроки 49–50. Сумма и разность одночленов

Цель: рассмотреть операции сложения и вычитания одночленов.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Какое выражение называется одночленом? Как определить степень одночлена?

2. Приведите одночлен к стандартному виду: $9a^3b \cdot (-2{,}5a^2b^4)b^2$.

3. Определите степень одночлена $-6a^3b^2$ и найдите его значение при $a = 2$ и $b = 3$.

Вариант 2

1. Какая форма одночлена называется стандартным видом одночлена? Что называется коэффициентом одночлена?

2. Приведите одночлен к стандартному виду: $7a^2b^2\cdot(-1{,}5a^3b^3)a^3$.

3. Определите степень одночлена $-8a^2b^3$ и найдите его значение при $a=3$ и $b=2$.

III. Изучение нового материала

Одночлены, которые **могут отличаться только коэффициентами** (при одинаковой буквенной части), называют **подобными**.

Пример 1

а) Одночлены $7a$ и $-3a$, $2ab^2$ и $2ab^2$, $3a^2bc$ и $-5a^2bc$ – подобные, т. к. имеют одинаковую буквенную часть.

б) Одночлены $2a^2$ и $-5a^3$, $3ab$ и $7ab^2$ не являются подобными, т. к. имеют разную буквенную часть ($2a^2$ и $-5a^3$ отличаются степенями переменной a; $3ab$ и $7ab^2$ отличаются степенями переменной b).

Пока операцию **сложения (вычитания)** введем только для **подобных одночленов** по следующему **правилу (алгоритму)**:

1) приводим все одночлены **к стандартному виду**;

2) убеждаемся, что **одночлены** являются **подобными**;

3) находим **сумму коэффициентов** подобных одночленов;

4) выписываем эту **сумму** и дописываем **общую буквенную часть одночленов**.

Пример 2

Выполним действия: $3ab^2-2a\cdot 6b\cdot\frac{1}{3}b+5ab\cdot 3b$.

В соответствии с алгоритмом получаем.

1) Первый одночлен $3ab^2$ уже имеет стандартный вид. Приведем к такому виду второй и третий одночлены: $-2a\cdot 6b\cdot\frac{1}{3}b=$

$$=\left(-2\cdot 6\cdot\frac{1}{3}\right)\cdot a\cdot(b\cdot b)=-4ab^2 \text{ и } 5ab\cdot 3b=(5\cdot 3)\cdot a\cdot(b\cdot b)=15ab^2.$$

2) Получили три одночлена: $3ab^2$, $-4ab^2$ и $15ab^2$, которые действительно являются подобными (имеют одинаковую буквенную часть).

3) Найдем сумму коэффициентов этих одночленов: $3-4+15=14$.

4) Выпишем ответ: $14ab^2$.

Пример 3

Упростим выражение $3ab^2+5ab-4ab^2-ab$.

В сумму входят четыре одночлена, но они не являются подобными. Однако среди них есть две группы подобных одночленов: $3ab^2$ и

$-4ab^2$, $5ab$ и ab. Сгруппируем и сложим (вычтем) их. Получаем: $3ab^2+5ab-4ab^2-ab=(3ab^2-4ab^2)+(5ab-ab)=-ab^2+4ab$.

Еще раз подчеркнем, что складывать (вычитать) можно **только подобные одночлены** (аналогично нельзя сложить 5 м и 3 кг).

В ряде случаев возникает **обратная задача** – представить одночлен в виде суммы слагаемых. Естественно, эти слагаемые должны быть одночленами подобными исходному.

Пример 4

Представим одночлен $7ab^2$ в виде суммы одночленов.

В этом случае задачу можно решить бесконечным множеством способов:

а) $7ab^2=2ab^2+5ab^2$;

б) $7ab^2=10ab^2-3ab^2$;

в) $7ab^2=10ab^2+2ab^2-5ab^2$ и т.д.

Очень часто сложение (вычитание) одночленов возникает при решении текстовых задач.

Пример 5

Турист сначала шел 3 ч пешком, затем ехал 2 ч на автобусе со скоростью в 12 раз большей, чем при ходьбе пешком. Весь проделанный путь составил 135 км. Найдем скорости движения туриста пешком и на автобусе.

Пусть скорость движения пешком равна x км/ч, тогда за 3 ч турист пройдет $3x$ км. При этом скорость автобуса в 12 раз больше, т. е. $12x$ км/ч. За 2 ч автобус проедет $12x \cdot 2=24x$ (км). Весь проделанный туристом путь равен $3x+24x$. По условию задачи такой путь составляет 135 км. Получаем уравнение $3x+24x=135$ (**первый этап** решения задачи – составление математической модели).

Решим это уравнение. Сложим подобные одночлены $3x$ и $24x$ и получим $27x$. Имеем уравнение $27x=135$. Разделим обе части уравнения на 27 и найдем $x=135:27=5$ (**второй этап** – работа с составленной моделью).

Так как за x приняли скорость пешехода, то она равна 5 км/ч. Скорость автобуса в 12 раз больше, т. е. $12x=60$ км/ч (**третий этап** – ответ на вопрос задачи).

IV. Задание на уроках

№ 21.3; 21.10; 21.12 (а, б); 21.15 (а); 21.16 (в, г); 21.19 (б); 21.22; 21.28 (а); 21.34 (б); 21.37; 21.40.

V. Контрольные вопросы

1. Какие одночлены можно складывать (вычитать)?
2. Какие одночлены называют подобными?
3. Как складывать (вычитать) подобные одночлены?

VI. Задание на дом

№ 21.5; 21.11; 21.2 (в, г); 21.15 (б); 21.17 (а, б); 21.19 (б); 21.23; 21.28 (б); 1.34 (а); 21.38; 21.41.

VII. Подведение итогов уроков

§ 22. Умножение одночленов. Возведение одночлена в натуральную степень

Уроки 51–52. Произведение одночленов. Степень одночлена

Цель: развить навыки умножения и возведения одночленов в степень.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1. Упростите выражение:

а) $7{,}2a - 8{,}1a + 3{,}7a$;

б) $6a \cdot 2b^2 - 3ab \cdot (-5b) - 17ab^2$;

в) $3a - 5ab - 2a + 9ab$.

2. Решите уравнение: $2(3x-1)-5(2x+1)=9$.

3. Докажите, что сумма трех последовательных натуральных чисел делится на 3.

Вариант 2

1. Упростите выражение:

а) $3{,}8a - 5{,}3a + 7{,}4a$;

б) $3a \cdot 7b^2 - 2ab \cdot (-3b) - 15ab^2$;

в) $5a + 11ab - 3a - 8ab$.

2. Решите уравнение: $3(2x+3)-4(3x-1)=31$.

3. Докажите, что сумма пяти последовательных натуральных чисел делится на 5.

III. Изучение нового материала

При умножении одночленов и возведении одночлена в степень используются свойства степеней. При этом получается одночлен, который обычно записывают в стандартном виде.

Пример 1

Умножим одночлены $A=2{,}3\cdot a\cdot b^2\cdot c$ и $B=-0{,}2\cdot a^3\cdot b\cdot c^4$. Найдем произведение одночленов A и B. Перемножим числовые множители и степени с одинаковыми основаниями. Получаем: $A\cdot B=2{,}3\cdot a\cdot b^2\cdot c\cdot(-0{,}2\cdot a^3\cdot b\cdot c^4)=$ $=2{,}3\cdot(-0{,}2)\cdot(a\cdot a^3)\cdot(b^2\cdot b)\cdot(c\cdot c^4)=-0{,}46a^4\cdot b^3\cdot c^5$.

Пример 2

Умножим одночлены $A=0{,}3\cdot a^2\cdot b$, $B=2\cdot a\cdot b\cdot c^2$ и $C=3\cdot a\cdot b^2\cdot c^4$. Найдем произведение одночленов A, B и C. Используя свойства степеней, получаем: $A\cdot B\cdot C=(0{,}3\cdot a^2\cdot b)\cdot(2\cdot a\cdot b\cdot c^2)\cdot(3\cdot a\cdot b^2\cdot c^4)=$ $=(0{,}3\cdot 2\cdot 3)\cdot(a^2\cdot a\cdot a)\cdot(b\cdot b\cdot b^2)\cdot(c^2\cdot c^4)=1{,}8\cdot a^4\cdot b^4\cdot c^6$.

Пример 3

Возведем в пятую степень одночлен $A=2\cdot a\cdot b^2\cdot c^3$. Получаем: $A^5=(2\cdot a\cdot b^2\cdot c^3)^5=2^5\cdot a^5\cdot(b^2)^5\cdot(c^3)^5=32\cdot a^5\cdot b^{10}\cdot c^{15}$.

Запись одночлена в стандартном виде, как правило, позволяет проще вычислить его значение, если известны значения букв, входящих в него. При этом используется умножение одночленов и возведение одночленов в степень.

Пример 4

Вычислить значение одночлена $A=2\cdot a^2\cdot b\cdot c\cdot(b\cdot c)^2\cdot a$, если $a=3$, $b=\frac{1}{2}$, $c=2$.

Если сразу подставлять значения переменных a, b, c в одночлен A, то получим достаточно громоздкое выражение $A=2\cdot 3^2\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 2\right)^2\cdot 3$.

Поэтому сначала запишем одночлен A в стандартном виде: $A=2\cdot(a^2\cdot a)\cdot(b\cdot b^2)\cdot(c\cdot c^2)=2\cdot a^3\cdot b^3\cdot c^3=2\cdot(a\cdot b\cdot c)^3$. Теперь можно подставить значения a, b, c: $A=2\cdot\left(3\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\right)^3=2\cdot 3^3=2\cdot 27=54$.

В ряде случаев, не приведя одночлен к стандартному виду, найти его значение невозможно, т. к. известны лишь определенные комбинации переменных, но не сами переменные.

Пример 5

Вычислить значение одночлена $A = 0{,}5 \cdot a^2 \cdot b^3 \cdot c^2 \cdot (a \cdot c)^2 \cdot c$, если $a \cdot b \cdot c = 1$, $a \cdot c^2 = 2$.

В отличие от предыдущего примера здесь даже непонятно, что можно подставить. Поэтому приведем одночлен к стандартному виду: $A = 0{,}5 \cdot a^2 \cdot b^3 \cdot c^2 \cdot a^2 \cdot c^2 \cdot c = 0{,}5 \cdot (a^2 \cdot a^2) \cdot b^3 \cdot (c^2 \cdot c^2 \cdot c) = 0{,}5 \cdot a^4 \cdot b^3 \cdot c^5$.

Теперь в этом одночлене выделим те комбинации переменных, которые известны: $A = 0{,}5 \cdot a^4 \cdot b^3 \cdot c^5 = 0{,}5 \cdot a^3 \cdot b^3 \cdot c^3 \cdot (a \cdot c^2) = 0{,}5 \cdot (a \cdot b \cdot c)^3 \cdot (a \cdot c^2)$.

После этого можно подставить значения $a \cdot b \cdot c = 1$ и $a \cdot c^2 = 2$: $A = 0{,}5 \cdot 1^3 \cdot 2 = 1$.

IV. Задание на уроках

№ 22.1; 22.4; 22.6 (а, б); 22.8; 22.10 (а); 22.14 (в, г); 22.15 (а, б); 22.17 (а, в); 22.19 (г); 22.23 (а); 22.25 (а, б); 22.33 (в, г).

V. Контрольные вопросы

1. Как умножить одночлены?
2. Как возвести одночлен в натуральную степень?

VI. Задание на дом

№ 22.2; 22.5; 22.7 (в, г); 22.9; 22.10 (б); 22.14 (а, б); 22.15 (в, г); 22.17 (б, г); 22.19 (в); 22.23 (б); 22.25 (в, г); 22.33 (а, б).

VII. Подведение итогов уроков

§ 23. Деление одночлена на одночлен

Урок 53. Частное одночленов

Цель: рассмотреть деление двух одночленов.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).
2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1. Умножьте одночлены $3x^2y$; $-0{,}5x^3y^2$ и $2xy^4$.

2. Одночлен $2a^3b^2c$ возведите в квадрат и в куб.

3. Представьте выражение $(-3a^3b)^2\cdot 2a^2b^3\cdot(-0{,}5ab^2)$ в виде одночлена стандартного вида и определите его степень.

Вариант 2

1. Умножьте одночлены $2xy^2$; $3x^4y^3$ и $-0.5x^2y^3$.

2. Одночлен $3ab^3c^2$ возведите в квадрат и в куб.

3. Представьте выражение $(-2a^3b^2)^3\cdot 3a^3b^4\cdot(-0{,}5a^2b)$ в виде одночлена стандартного вида и определите его степень.

III. Изучение нового материала

Из предыдущих разделов известно, что **произведение одночленов и степень одночлена также являются одночленами**. Вместе с тем сумма и разность одночленов будет **одночленом**, если исходные одночлены являются **подобными** (в противном случае получим многочлен, см. следующую тему). Нам осталось рассмотреть и обсудить последнюю операцию – деление одночленов.

При делении одночлена на одночлен **сокращаются общие делители, входящие в эти одночлены**. В результате может получиться или одночлен (в частности, число), или алгебраическая дробь. Естественно, при делении используют свойства степеней.

Пример 1

а) Разделим одночлен $6a^3b^2$ на одночлен $(-2ab)$. Получаем: $6a^3b^2:(-2ab)=\dfrac{6a^3b^2}{-2ab}=\dfrac{6}{-2}\cdot\dfrac{a^3}{a}\cdot\dfrac{b^2}{b}=-3a^2b$ – одночлен.

б) Разделим одночлен $6a^3b^2$ на одночлен $8a^3b^2$. Имеем: $6a^3b^2:(8a^3b^2)=\dfrac{6a^3b^2}{8a^3b^2}=\dfrac{6}{8}\cdot\dfrac{a^3}{a^3}\cdot\dfrac{b^2}{b^2}=\dfrac{3}{4}$ – число (одночлен).

в) Разделим одночлен $6a^3b^2$ на одночлен $2a^2b^3$. Получаем: $6a^3b^2:(2a^2b^3)=\dfrac{6a^3b^2}{2a^2b^3}=\dfrac{6}{1}\cdot\dfrac{a^3}{a^2}\cdot\dfrac{b^2}{b^3}=\dfrac{3a}{b}$ – алгебраическая дробь.

г) Разделим одночлен $6a^3b^2$ на одночлен $12a^3b^2c$. Имеем: $6a^3b^2:(12a^3b^2c)=$
$=\dfrac{6a^3b^2}{12a^3b^2c}=\dfrac{6}{12}\cdot\dfrac{a^3}{a^3}\cdot\dfrac{b^2}{b^2}\cdot\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{2c}$ – алгебраическая дробь.

Из рассмотренного примера 1 видим, что частное от деления одночленов также будет одночленом при выполнении условий:

1) Делитель не должен содержать переменных, которых нет в делимом (в примере г) переменная c в делителе).

2) Степени общих переменных (в делимом и делителе) в делимом должны быть не меньше аналогичных степеней в делителе (в примере в) – в делимом величина b^2, в делителе – b^3).

При рассмотрении примера 1 появилось новое понятие – **алгебраическая дробь**, т. е. дробь, знаменатель которой содержит переменную или переменные. В 8 классе будут изучаться свойства алгебраических дробей и действия с ними, и вы увидите много общего с обыкновенными числовыми дробями.

Пример 2

Упростим выражение:

а) $48a^3b^7c^9 : (4ab^2c^4)^2 = \dfrac{48a^3b^7c^9}{(4ab^2c^4)^2} = \dfrac{48a^3b^7c^9}{16a^2b^4c^8} = \dfrac{48}{16}\cdot\dfrac{a^3}{a^2}\cdot\dfrac{b^7}{b^4}\cdot\dfrac{c^9}{c^8} = 3ab^3c$ – одночлен.

б) $48a^3b^7c^9 : (4a^3b^2c^4)^3 = \dfrac{48a^3b^7c^9}{(4a^3b^2c^4)^3} = \dfrac{48a^3b^7c^9}{64a^9b^6c^{12}} = \dfrac{48}{64}\cdot\dfrac{a^3}{a^9}\cdot\dfrac{b^7}{b^6}\cdot\dfrac{c^9}{c^{12}} =$

$= \dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{a^3}\cdot b\cdot\dfrac{1}{c^3} = \dfrac{3b}{4a^6c^3}$ – алгебраическая дробь.

IV. Задание на уроке

№ 23.4; 23.6; 23.9 (а, б); 23.10 (в, г); 23.12 (а, б); 23.15 (а, г); 23.17 (а); 23.19 (а).

V. Контрольные вопросы

1. Приведите основные свойства степеней.

2. При каких условиях частное от деления двух одночленов также будет одночленом?

VI. Задание на дом

№ 23.5; 23.7; 23.9 (в, г); 23.10 (а, б); 23.12 (в, г); 23.15 (б, в); 23.17 (г); 23.19 (б).

VII. Подведение итогов урока

Уроки 54–55. Контрольная работа № 5 по теме «Одночлены. Арифметические операции над одночленами»

Цель: проверка знаний учащихся с использованием разноуровневых вариантов.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Характеристика контрольной работы

Контрольная работа составлена в шести вариантах различной сложности (варианты 1, 2 – самые простые, варианты 3, 4 – средней сложности, варианты 5, 6 – самые сложные). При этом сложность вариантов нарастает не очень резко. Каждый вариант содержит шесть задач примерно одинаковой сложности (могут быть несколько сложнее две последние задачи).

При проверке вариантов 1, 2 оценка «5» ставится за правильное решение пяти задач, оценка «4» – четырех задач и оценка «3» – трех задач. Одна задача является резервной (или запасной) и дает некоторую возможность выбора учащимся. При таких же критериях оценки в случае вариантов 3, 4 дается дополнительно 0,5 балла и в случае вариантов 5, 6 – дополнительно 1,0 балл (учитывая более высокую сложность этих вариантов). Поэтому в случае вариантов 5, 6 оценку «5» можно получить за правильное решение четырех задач.

Выбор вариантов может быть сделан учителем или учащимся (при этом число экземпляров вариантов должно быть достаточным). Разумеется, учащиеся должны знать о различной сложности вариантов и критериях оценки контрольной работы.

III. Варианты работы

Вариант 1

1. Найдите значение одночлена $2a^2b^3$ при $a = 3$, $b = 2$.

2. Одночлен $2 \cdot (3ab) \cdot b$ запишите в стандартном виде и определите его степень.

3. Представьте выражение $16a^2b^6$ в виде квадрата одночлена.

4. Число 2520 разложите на простые множители.

5. Упростите выражение $7a \cdot a^4 - 2a^2 \cdot 3a^3 + 4a^5$.

6. Упростите выражение $\dfrac{(2a^2)^3}{3a \cdot 4a^3}$.

Вариант 2

1. Найдите значение одночлена $3a^3b^2$ при $a = 3$, $b = 2$.

2. Одночлен $3a \cdot (5ab)$ запишите в стандартном виде и определите его степень.

3. Представьте выражение $25a^4b^2$ в виде квадрата одночлена.

4. Число 1260 разложите на простые множители.

5. Упростите выражение $5a^3 \cdot 4a^4 - 8a \cdot a^6 + 3a^7$.

6. Упростите выражение $\dfrac{(3a^3)^2}{2a^2 \cdot 9a}$.

Вариант 3

1. Найдите значение одночлена $3ab^2c^3$ при $a = 3$, $b = 2$, $c = 3$.

2. Одночлен $3a^2 \cdot (2ab) \cdot bc$ запишите в стандартном виде и определите его степень.

3. Представьте выражение $-27a^3b^{12}$ в виде куба одночлена.

4. Докажите, что число $10^{135} + 8$ без остатка делится на 9.

5. Решите уравнение $4x^4 - (x^6 - 2x) + x^6 - (2x)^2 + 1 = 5$.

6. Упростите выражение $\dfrac{(4a^2b^2)^2 \cdot (ac)^3}{5(a^3b)^2 \cdot c}$.

Вариант 4

1. Найдите значение одночлена $5a^2bc^3$ при $a = 5$, $b = 2$, $c = 3$.

2. Одночлен $4a \cdot (3a^2b) \cdot bc^2$ запишите в стандартном виде и определите его степень.

3. Представьте выражение $-64a^9b^6$ в виде куба одночлена.

4. Докажите, что число $10^{237} + 2$ без остатка делится на 3.

5. Решите уравнение $(3x^3)^2 + 5x^4 - (5x^4 - 4x) - 9x^6 - 3 = 5$.

6. Упростите выражение $2\dfrac{(3a^2b)^2 \cdot (bc)^3}{2(ab^2)^2 \cdot c^2}$.

Вариант 5

1. Выполните действия: $(2x^n)^3 \cdot x^{2n} : x^3$.

2. Одночлен $4a^3 \cdot (3abc)^2 \cdot (bc)^3$ запишите в стандартном виде и определите его степень.

3. Упростите выражение $(3a^2b)^2 \cdot b + (2ab^3)^2 \cdot \left(\dfrac{a}{b}\right)^3 : a$.

4. Решите уравнение $2\dfrac{x^{11} \cdot x^9 \cdot (x^3)^4}{x^{27} \cdot x^4} + 1 = 5x - 8$.

5. Найдите последнюю цифру числа $2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{36}$.

6. Сколько слагаемых в правой части равенства $5^{43} = 5 + 5 + \ldots + 5$?

Вариант 6

1. Выполните действия: $(3x^n)^2 \cdot x^{4n} : x^5$.

2. Одночлен $3a^4 \cdot (2abc)^2 \cdot (b^2c)^3$ запишите в стандартном виде и определите его степень.

3. Упростите выражение $(2ab^2)^2 \cdot a + (3a^3b)^2 \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^3 : b$.

4. Решите уравнение $3\frac{(x^8)^4 \cdot (x^3)^4}{x^{33} \cdot (x^5)^2} - 5 = 7 - x$.

5. Найдите последнюю цифру числа $2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{24}$.

6. Сколько слагаемых в правой части равенства $3^{37} = 3 + 3 + \ldots + 3$?

Урок 56. Итоги контрольной работы

Цели: сообщить результаты работы, рассмотреть наиболее типичные ошибки, разобрать трудные задачи.

Ход урока

I. Сообщение темы и целей урока

II. Итоги контрольной работы

1. Распределение работ по вариантам и результаты решения.

Данные о результатах работы удобно заносить в таблицу (для каждой пары вариантов).

Итоги \ № задачи	1	2	3	…	6
+	5				
±	1				
—	1				
Ø	1				

Обозначения:

\+ – число решивших задачу правильно или почти правильно;

± – число решивших задачу со значительными погрешностями;

— – число не решивших задачу;

Ø – число не решавших задачу.

2. Типичные ошибки, возникшие при решении задач.

3. Наиболее трудные задачи и их разбор (учителем или школьниками, сделавшими эту задачу).

4. Разбор всей контрольной работы (вывесить на стенде ответы к заданиям вариантов и разбор наиболее трудных вариантов).

III. Ответы и решения

Ответы

Вариант 1

1. *Ответ*: 144.
2. *Ответ*: $6ab^2$, степень 3.
3. *Ответ*: $(4ab^3)^2$.
4. *Ответ*: $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$.
5. *Ответ*: $9a^5$.
6. *Ответ*: $\frac{2}{3}a^2$.

Вариант 2

1. *Ответ*: 324.
2. *Ответ*: $15a^2b$, степень 3.
3. *Ответ*: $(5a^2b)^2$.
4. *Ответ*: $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$.
5. *Ответ*: $15a^7$.
6. *Ответ*: $\frac{1}{2}a^3$.

Вариант 3

1. *Ответ*: 1620.
2. *Ответ*: $6a^3b^2c$, степень 6.
3. *Ответ*: $(-3ab^4)^3$.
4. *Ответ*: доказано.
5. *Ответ*: $x = 2$.
6. *Ответ*: $\frac{16}{5}ab^2c^2$.

Вариант 4

1. *Ответ*: 6750.
2. *Ответ*: $12a^3b^2c^2$, степень 7.
3. *Ответ*: $(-4a^3b^2)^3$.
4. *Ответ*: доказано.
5. *Ответ*: $x = 2$.
6. *Ответ*: $\frac{9}{2}a^2bc$.

Решения

Вариант 5

1. Используем свойства степеней и получим: $(2x^n)^3 \cdot x^{2n} : x^3 = 2^3 \cdot x^{3n} \cdot x^{2n} : x^3 = 8x^{5n} : x^3 = 8x^{5n-3}$.

Ответ: $8x^{5n-3}$.

2. Применим свойства степеней и выполним возведение в степень и умножение: $4a^3 \cdot (3abc)^2 \cdot (bc)^3 = 4a^3 \cdot 9a^2b^2c^2 \cdot b^3c^3 = (4 \cdot 9) \cdot (a^3 \cdot a^2) \cdot (b^2 \cdot b^3) \cdot (c^2 \cdot c^3) = 36a^5b^5c^5$. Степень этого одночлена равна $5 + 5 + 5 = 15$.

Ответ: $36a^5b^5c^5$, степень 15.

3. Используем свойства степеней и подобие одночленов. Имеем:

$$\left(3a^2b\right)^2 \cdot b + \left(2ab^3\right)^2 \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^3 : a = 9a^4b^2 \cdot b + 4a^2b^6 \cdot \frac{a^3}{b^3} : a = 9a^4b^3 + 4a^5b^3 : a =$$

$$= 9a^4b^3 + 4a^4b^3 = 13a^4b^3.$$

Ответ: $13a^4b^3$.

4. Упростим дробь в левой части уравнения $\dfrac{x^{11} \cdot x^9 \cdot (x^3)^4}{x^{27} \cdot x^4} = \dfrac{x^{20} \cdot x^{12}}{x^{31}} = x^{32} \cdot x^{31} = x$. Тогда уравнение принимает вид $2x + 1 = 5x - 8$, или $1 + 8 = 5x - 2x$, или $9 = 3x$, откуда $x = 3$.

Ответ: $x = 3$.

5. В сумму входит 36 слагаемых. Сгруппируем их по 4 и получим 9 групп: $2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{36} = (2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) + (2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8) + \ldots + (2^{33} + 2^{34} + 2^{35} + 2^{36}) = (2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) + 2^4(2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) + \ldots + 2^{32}(2 + 2^2 + 2^3 + 2^4)$. Найдем $2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 2 + 4 + 8 + 16 = 30$ – число, которое оканчивается нулем. Поэтому и вся сумма оканчивается цифрой 0.

Ответ: 0.

6. Пусть в правой части n слагаемых. Тогда получаем равенство $5^{43} = 5 \cdot n$, откуда $n = 5^{43} : 5 = 5^{42}$.

Ответ: 5^{42}.

Вариант 6

1. Используем свойства степеней и получим: $(3x^n)^2 \cdot x^{4n} : x^5 = 9x^{2n} \cdot x^{4n} : x^5 = 9x^{6n} : x^5 = 9x^{6n-5}$.

Ответ: $9x^{6n-5}$.

2. Применим свойтва степеней и выполним возведение в степень и умножение: $3a^4 \cdot (2abc)^2 \cdot (b^2c)^3 = 3a^4 \cdot 4a^2b^2c^2 \cdot b^6c^3 = (3 \cdot 4) \cdot (a^4 \cdot a^2) \cdot (b^2 \cdot b^6) \cdot (c^2 \cdot c^3) = 12a^6b^8c^5$. Степень этого одночлена равна $6 + 8 + 5 = 19$.

Ответ: $12a^6b^8c^5$, степень 19.

3. Используем свойства степеней и подобие одночленов. Имеем:

$$(2ab^2)^2 \cdot a + (3a^3b)^2 \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^3 : b = 4a^2b^4 \cdot a + 9a^6b^2 \cdot \frac{b^3}{a^3} : b = 4a^3b^4 + 9a^3b^5 : b =$$

$$= 4a^3b^4 + 9a^3b^4 = 13a^3b^4.$$

Ответ: $13a^3b^4$.

4. Упростим дробь в левой части уравнения $\frac{(x^8)^4\cdot(x^3)^4}{x^{33}\cdot(x^5)^2}=\frac{x^{32}\cdot x^{12}}{x^{33}\cdot x^{10}}=$ $=x^{44}:x^{43}=x$. Тогда уравнение принимает вид $3x-5=7-x$, или $3x+x=7+5$, или $4x=12$, откуда $x=3$.

Ответ: $x=3$.

5. В сумму входит 24 слагаемых. Сгруппируем их по 4 и получим 6 групп: $2+2^2+2^3+2^4+\ldots+2^{24}=(2+2^2+2^3+2^4)+(2^5+2^6+2^7+$ $+2^8)+\ldots+(2^{21}+2^{22}+2^{23}+2^{24})=(2+2^2+2^3+2^4)+2^4(2+2^2+2^3+$ $+2^4)+\ldots+2^{20}(2+2^2+2^3+2^4)$. Найдем $2+2^2+2^3+2^4=2+4+8+$ $+16=30$ – число, которое оканчивается нулем. Поэтому и вся сумма оканчивается цифрой 0.

Ответ: 0.

6. Пусть в правой части n слагаемых. Тогда получаем равенство $3^{37}=3\cdot n$, откуда $n=3^{37}:3=3^{36}$.

Ответ: 3^{36}.

Уроки 57–58. Зачет по темам «Степень с натуральным показателем и ее свойства» и «Одночлены. Арифметические операции над одночленами»

Цели: сравнение успеваемости учащихся при одинаковой сложности заданий, возможность повышения оценок за выполненные контрольные работы.

Ход уроков

I. Сообщение темы и целей уроков

II. Характеристика зачетной работы

Работа составлена в двух равноценных вариантах. По сравнению с контрольной работой увеличено количество заданий. Соответственно у учащихся возрастает возможность выбора задач. Все задания разбиты на три блока А, В и С. Самые простые задачи находятся в блоке А, более сложные – в блоке В, еще сложнее – в блоке С. Каждая задача из блока А оценивается в 1 балл, из блока В – в 2 балла, из блока С – в 3 балла. Поэтому за правильное решение всех задач блока А можно получить 7 баллов, блока В – 8 баллов, блока С – 9 баллов (всего 24 балла). Оценка «3» ставится за 6 баллов, оценка «4» – за 10 баллов, оценка «5» – за 14 баллов.

Так как эта работа является зачетной, то в нее не включены принципиально новые задачи. Поэтому разбору заданий работы занятия можно и не посвящать (решения задач могут быть вывешены на стенде). Для стендового размещения разбор вариантов приводится.

Вариант 1

А

1. Вычислите: $\dfrac{11^2-5\cdot3^3+3\cdot2^4}{6^3-15\cdot4^2+5\cdot2^3}$.

2. Найдите значение одночлена $7\cdot a^3\cdot b^2\cdot c$ при $a=2$, $b=\dfrac{1}{3}$ и $c=\dfrac{1}{5}$.

3. Докажите, что число $1723^{2576}-3$ является составным.

4. Выполните действия:

а) $(3\cdot x^2\cdot y\cdot z^3)^2\cdot(2\cdot x\cdot y^2\cdot z)^3$;

б) $(4\cdot x^3\cdot y^3\cdot z^4)^2:(6\cdot x\cdot y\cdot z^2)^3$.

5. Запишите одночлен $3b^2c\cdot(-2ab)\cdot0{,}5ca$ в стандартном виде и определите его степень.

6. Число 17 640 разложите на произведение простых множителей.

7. Сравните числа 2^{30} и 3^{20}.

В

8. Определите последнюю цифру числа $327^{153}+536^{164}$.

9. Сколько сомножителей (слагаемых) находится в правой части равенства?

а) $2^{300}=2\cdot2\cdot\ldots\cdot2$;

б) $2^{300}=2+2+\ldots+2$.

10. Вычислите: $\dfrac{2\cdot5^{22}-9\cdot5^{21}}{25^{10}}$.

11. Упростите выражение $(x^n)^2\cdot x^3:x^4$.

С

12. Докажите, что число $3+3^2+\ldots+3^{120}$ без остатка делится на 5.

13. Выполните действия: $\dfrac{x^n\cdot y^{2n+1}\cdot(x^2\cdot y)^n}{(x^n\cdot y^n)^3}$.

14. Решите уравнение $2^{97}-2^{96}-2^{95}-\ldots-2+4x=3$.

Вариант 2

А

1. Вычислите: $\dfrac{13^2-7\cdot2^3+5\cdot2^4}{7^2-11\cdot4^2+6\cdot2^5}$.

2. Найдите значение одночлена $5\cdot a^2\cdot b^3\cdot c$ при $a=\dfrac{1}{2}$ $b=3$ и $c=\dfrac{1}{5}$.

3. Докажите, что число $1927^{1634}-7$ является составным.

4. Выполните действия:

а) $(2\cdot x\cdot y^3\cdot z^2)^3\cdot(3\cdot x^2\cdot y\cdot z)^2$;

б) $(5\cdot x^2\cdot y^3\cdot z^4)^3:(3\cdot x^2\cdot y\cdot z^2)^2$.

5. Запишите одночлен $4a^2c\cdot(-3bc^2)\cdot0,5ca$ в стандартном виде и определите его степень.

6. Число 18 900 разложите на произведение простых множителей.

7. Сравните числа 3^{24} и 2^{36}.

В

8. Определите последнюю цифру числа $523^{161}+175^{234}$.

9. Сколько сомножителей (слагаемых) находится в правой части равенства?

а) $3^{200}=3\cdot3\cdot\ldots\cdot3$;

б) $3^{200}=3+3+\ldots+3$.

10. Вычислите: $\dfrac{5\cdot2^{32}-4\cdot2^{30}}{4^{16}}$.

11. Упростите выражение $(x^n)^3\cdot x^2:x^5$.

С

12. Докажите, что число $2+2^2+\ldots+2^{160}$ без остатка делится на 5.

13. Выполните действия: $\dfrac{x^{2\cdot n}\cdot y^{n+1}\cdot(x^n\cdot y^n)^2}{x^n(x^3\cdot y^3)^n}$.

14. Решите уравнение $2^{78}-2^{77}-2^{76}-\ldots-2+3x=1$.

III. Разбор заданий

Вариант 1

1. Используя определение степени с натуральным показателем, получаем: $\dfrac{11^2-5\cdot3^3+3\cdot2^4}{6^3-15\cdot4^2+5\cdot2^3}=\dfrac{121-5\cdot27+3\cdot16}{216-15\cdot16+5\cdot8}=\dfrac{121-135+48}{216-240+40}=$ $=\dfrac{34}{16}=\dfrac{17}{8}=2\dfrac{1}{8}$.

Ответ: $2\dfrac{1}{8}$.

2. Подставим данные значения величин $a = 2$, $b = \frac{1}{3}$ и $c = \frac{1}{5}$ в одночлен $7 \cdot a^3 \cdot b^2 \cdot c$ и получим: $7 \cdot 2^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{5}\right) = 7 \cdot 8 \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{5} = \frac{56}{45} = 1\frac{11}{45}$.

Ответ: $1\frac{11}{45}$.

3. Очевидно, что любое нечетное число в любой степени будет числом нечетным. Поэтому число 1723^{2576} – нечетное. Разность двух нечетных чисел будет числом четным. Следовательно, число $1723^{2576} - 3$ является четным и делится на 2. Так как данное число кроме единицы и самого себя имеет другой делитель, то по определению оно является составным.

Ответ: доказано.

4. Используем свойства степеней и выполним действия:

а) $(3 \cdot x^2 \cdot y \cdot z^3)^2 \cdot (2 \cdot x \cdot y^2 \cdot z)^3 =$

$= 3^2 \cdot (x^2)^2 \cdot y^2 \cdot (z^3)^2 \cdot 2^3 \cdot x^3 \cdot (y^2)^3 \cdot z^3 = 9 \cdot x^4 \cdot y^2 \cdot z^6 \cdot 8 \cdot x^3 \cdot y^6 \cdot z^3 =$

$= (9 \cdot 8) \cdot (x^4 \cdot x^3) \cdot (y^2 \cdot y^6) \cdot (z^6 \cdot z^3) = 72 \cdot x^7 \cdot y^8 \cdot z^9$;

б) $\frac{(4 \cdot x^3 \cdot y^2 \cdot z^4)^2}{(6 \cdot x \cdot y \cdot z^2)^3} = \frac{4^2 \cdot x^6 \cdot y^4 \cdot z^8}{6^3 \cdot x^3 \cdot y^3 \cdot z^6} = \frac{16}{216} \cdot \frac{x^6}{x^3} \cdot \frac{y^4}{y^3} \cdot \frac{z^8}{z^6} =$

$= \frac{16}{216} \cdot x^{6-3} \cdot y^{4-3} \cdot z^{8-6} = \frac{2}{27} \cdot x^3 \cdot y \cdot z^2$.

Ответ: а) $72 \cdot x^7 \cdot y^8 \cdot z^9$; б) $\frac{2}{27} \cdot x^3 \cdot y \cdot z^2$.

5. Используя правила умножения одночленов, получаем:

$3b^2c \cdot (-2ab) \cdot 0{,}5ca = (3 \cdot (-2) \cdot 0{,}5) \cdot (a \cdot a) \cdot (b^2 \cdot b) \cdot (c \cdot c) = -3a^2b^3c^2$.

Степень одночлена равна 2 + 3 + 2 = 7.

Ответ: $-3a^2b^3c^2$, степень 7.

6. Применим признаки делимости чисел и получим: $17\,640 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2$.

Ответ: $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2$.

7. Представим числа в виде чисел с одинаковыми показателями степени: $2^{30} = (2^3)^{10} = 8^{10}$ и $3^{20} = (3^2)^{10} = 9^{10}$. Так как $8 < 9$, то и $8^{10} < 9^{10}$, т. е. $2^{30} < 3^{20}$.

Ответ: $2^{30} < 3^{20}$.

8. Сначала определим последнюю цифру числа 327^{153}. Для этого найдем остаток от деления показателя степени 153 на 4. Он равен 1, т. е. $153 = 4 \cdot 38 + 1$. Тогда $327^{153} = 327^{4 \cdot 38 + 1}$. Так как при возведении числа в степень его последняя цифра повторяется через каждые 4 степени, то последние цифры чисел 327^{153} и 327^1 одинаковы и рав-

ны 7. Число, которое оканчивается цифрой 6, в любой степени также будет оканчиваться цифрой 6, т. е. 536^{164} оканчивается цифрой 6. Тогда последняя цифра числа $327^{153} + 536^{164}$ определяется суммой последних цифр этих чисел: $7 + 6 = 13$ и равна 3.

Ответ: 3.

9. а) Пусть в правой части равенства $2^{300} = 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2$ находится n одинаковых множителей 2. Тогда по определению степени с натуральным показателем имеем $2^{300} = 2^n$. Так как равны степени с одинаковым основанием 2, то равны и показатели степеней $300 = n$. Таким образом, в правой части находится 300 сомножителей.

б) Пусть в правой части равенства $2^{300} = 2 + 2 + \ldots + 2$ находится n одинаковых слагаемых 2. Заменим сложение умножением и получим $2^{300} = 2 \cdot n$, откуда $n = 2^{300} : 2 = 2^{299}$. Таким образом, в правой части находится 2^{299} слагаемых.

Ответ: а) 300; б) 2^{299}.

10. В числителе дроби вынесем 5^{21} за скобки и получим:
$$\frac{2 \cdot 5^{22} - 9 \cdot 5^{21}}{25^{10}} = \frac{5^{21}(2 \cdot 5 - 9)}{(5^2)^{10}} = \frac{5^{21} \cdot 1}{5^{20}} = 5.$$

Ответ: 5.

11. Используем свойства степеней. Тогда: $(x^n)^2 \cdot x^3 : x^4 = x^{2n} \cdot x^3 : x^4 =$ $= x^{2n+3} : x^4 = x^{2n-1}$.

Ответ: x^{2n-1}.

12. Учтем, что при возведении любого числа в степень его последняя цифра повторяется при изменении показателя степени на 4. Поэтому в данной сумме последовательно сгруппируем слагаемые по 4 и получим: $3 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^{120} = (3 + 3^2 + 3^3 + 3^4) + (3^5 + 3^6 + 3^7 + 3^8) +$ $+ \ldots + (3^{117} + 3^{116} + 3^{119} + 3^{120})$. Разберемся со слагаемыми в первой скобке: число 3 оканчивается на 3, число 3^2 – на 9, число 3^3 – на 7, число 3^4 – на 1. Поэтому последняя цифра числа $3 + 3^2 + 3^3 + 3^4$ определяется суммой последних цифр слагаемых: $3 + 9 + 7 + 1 = 20$, т. е. последняя цифра этой суммы равна 0. Очевидно, что числа $3^5, 3^9, \ldots, 3^{117}$ оканчивается той же цифрой, что и число 3; числа 3^6, $3^{10}, \ldots, 3^{118}$ – той же цифрой, что и число 3^2 и т. д. Тогда, очевидно, что суммы слагаемых в каждой скобке оканчиваются одной и той же цифрой 0. Поэтому сумма всех слагаемых оканчивается цифрой 0. По признаку делимости такое число без остатка делится на 5.

Ответ: доказано.

13. Используем свойства степеней и выполним действия:
$$\frac{x^n \cdot y^{2n+1}(x^2 \cdot y)^n}{(x^n \cdot y^n)^3} = \frac{x^n \cdot y^{2n+1} \cdot (x^{2n} \cdot y^n)}{x^{3n} \cdot y^{3n}} = \frac{(x^n \cdot x^{2n}) \cdot (y^{2n+1} \cdot y^n)}{x^{3n} \cdot y^{3n}} =$$

$$= \frac{x^{n+2\cdot n}\cdot y^{2\cdot n+1+n}}{x^{3\cdot n}\cdot y^{3\cdot n}} = \frac{x^{3\cdot n}\cdot y^{3\cdot n+1}}{x^{3\cdot n}\cdot y^{3\cdot n}} = y^{3\cdot n+1-3\cdot n} = y^1 = y.$$

Ответ: y.

14. Подметим закономерность в степенях числа 2: $2^{97} - 2^{96} = 2^{96}(2-1) = 2^{96}$, $2^{96} - 2^{95} = 2^{95}(2-1) = 2^{95}$ и т. д. Тогда уравнение имеет вид $4x = 3$, откуда $x = \frac{3}{4}$.

Ответ: $\frac{3}{4}$.

Вариант 2

1. Используя определение степени с натуральным показателем, получаем: $\frac{13^2 - 7\cdot 2^3 + 5\cdot 2^4}{7^3 - 11\cdot 4^2 + 6\cdot 2^5} = \frac{169 - 7\cdot 8 + 5\cdot 16}{49 - 11\cdot 16 + 6\cdot 32} = \frac{169 - 56 + 80}{49 - 176 + 192} = \frac{193}{65} = 2\frac{63}{65}$.

Ответ: $2\frac{63}{65}$.

2. Подставим данные значения величин $a = \frac{1}{2}$, $b = 3$ и $c = \frac{1}{5}$ в одночлен $5\cdot a^2\cdot b^3\cdot c$ и получим: $5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot 3^3\cdot\left(\frac{1}{5}\right) = 5\cdot\frac{1}{5}\cdot 27\cdot\frac{1}{5} = \frac{27}{4} = 6\frac{3}{4}$.

Ответ: $6\frac{3}{4}$.

3. Очевидно, что любое нечетное число в любой степени будет числом нечетным. Поэтому число 1927^{1634} – нечетное. Разность двух нечетных чисел будет числом четным. Следовательно, число $1927^{1634} - 7$ является четным и делится на 2. Так как данное число кроме единицы и самого себя имеет другой делитель, то по определению оно является составным.

Ответ: доказано.

4. Используем свойства степеней и выполним действия:

а) $(2\cdot x\cdot y^3\cdot z^2)^3\cdot(3\cdot x^2\cdot y\cdot z)^2 =$
$= 2^3\cdot x^3\cdot(y^3)^3\cdot(z^2)^3\cdot 3^2\cdot(x^2)^2\cdot y^2\cdot z^2 = 8\cdot x^3\cdot y^9\cdot z^6\cdot 9\cdot x^4\cdot y^2\cdot z^2 =$
$= (8\cdot 9)\cdot(x^3\cdot x^4)\cdot(y^9\cdot y^2)\cdot(z^6\cdot z^2) = 72\cdot x^7\cdot y^{11}\cdot z^8;$

б) $\frac{(5\cdot x^2\cdot y^3\cdot z^4)^3}{(3\cdot x^2\cdot y\cdot z^2)^2} = \frac{5^3\cdot x^6\cdot y^9\cdot z^{12}}{3^2\cdot x^4\cdot y^2\cdot z^4} = \frac{125}{9}\cdot\frac{x^6}{x^4}\cdot\frac{y^9}{y^2}\cdot\frac{z^{12}}{z^4} =$

$$= \frac{125}{9} \cdot x^{6-4} \cdot y^{9-2} \cdot z^{12-4} = \frac{125}{9} \cdot x^2 \cdot y^7 \cdot z^8.$$

Ответ: а) $72 \cdot x^7 \cdot y^{11} \cdot z^8$; б) $\frac{125}{9} \cdot x^2 \cdot y^7 \cdot z^8$.

5. Используя правила умножения одночленов, получаем:

$$4a^2c \cdot (-3bc^2) \cdot 0,5ca = (4 \cdot (-3) \cdot 0,5) \cdot (a^2 \cdot a) \cdot b \cdot (c \cdot c^2 \cdot c) = -6a^3bc^4.$$

Степень одночлена равна $3 + 1 + 4 = 8$.

Ответ: $-6a^3bc^4$, степень 8.

6. Применим признаки делимости чисел и получим: $18\,900 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7$.

Ответ: $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7$.

7. Представим числа в виде чисел с одинаковыми показателями степени: $3^{24} = (3^2)^{12} = 9^{12}$ и $2^{36} = (2^3)^{12} = 8^{12}$. Так как $9 > 8$, то и $9^{12} > 8^{12}$, т. е. $3^{24} > 2^{36}$.

Ответ: $3^{24} > 2^{36}$.

8. Сначала определим последнюю цифру числа 523^{161}. Для этого найдем остаток от деления показателя степени 161 на 4. Он равен 1, т. е. $161 = 4 \cdot 40 + 1$. Тогда $523^{161} = 523^{4 \cdot 40+1}$. Так как при возведении числа в степень его последняя цифра повторяется через каждые 4 степени, то последние цифры чисел 523^{161} и 523^1 одинаковы и равны 3. Число, которое оканчивается цифрой 5, в любой степени также будет оканчиваться цифрой 5, т. е. 175^{234} оканчивается цифрой 5. Тогда последняя цифра числа $523^{161} + 175^{234}$ определяется суммой последних цифр этих чисел $3 + 5 = 8$ и равна 8.

Ответ: 8.

9. а) Пусть в правой части равенства $3^{200} = 3 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 3$ находится n одинаковых множителей 3. Тогда по определению степени с натуральным показателем имеем $3^{200} = 3^n$. Так как равны степени с одинаковым основанием 3, то равны и показатели степеней $200 = n$. Таким образом, в правой части находится 200 сомножителей.

б) Пусть в правой части равенства $3^{200} = 3 + 3 + \ldots + 3$ находится n одинаковых слагаемых 3. Заменим сложение умножением и получим: $3^{200} = 3 \cdot n$, откуда $n = 3^{200} : 3 = 3^{199}$. Таким образом, в правой части находится 3^{199} слагаемых.

Ответ: а) 200; б) 3^{199}.

10. В числителе дроби вынесем 2^{32} за скобки и получим:

$$\frac{5 \cdot 2^{32} - 4 \cdot 2^{30}}{4^{16}} = \frac{5 \cdot 2^{32} - 2^2 \cdot 2^{30}}{(2^2)^{16}} = \frac{2^{32}(5-1)}{2^{32}} = 4.$$

Ответ: 4.

11. Используем свойства степеней. Тогда $(x^n)^3 \cdot x^2 : x^5 = x^{3n} \cdot x^2 : x^5 =$ $= x^{3n-2} : x^5 = x^{3n-3}$.

Ответ: x^{3n-3}.

12. Учтем, что при возведении любого числа в степень его последняя цифра повторяется при изменении показателя степени на 4. Поэтому в данной сумме последовательно сгруппируем слагаемые по 4 и получим: $2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{160} = (2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) + (2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8) +$ $+ \ldots + (2^{157} + 2^{158} + 2^{159} + 2^{160})$. Разберемся со слагаемыми в первой скобке: число 2 оканчивается на 2, число 2^2 – на 4, число 2^3 – на 8, число 2^4 – на 6. Поэтому последняя цифра числа $2 + 2^2 + 2^3 + 2^4$ определяется суммой последних цифр слагаемых: $2 + 4 + 8 + 6 = 20$, т. е. последняя цифра этой суммы равна 0. Очевидно, что числа 2^5, 2^9, ..., 2^{157} оканчивается той же цифрой, что и число 2; числа 2^6, 2^{10}, ..., 3^{158} – той же цифрой, что и число 2^2 и т. д. Тогда, очевидно, что суммы слагаемых в каждой скобке оканчиваются одной и той же цифрой 0. Поэтому сумма всех слагаемых оканчивается цифрой 0. По признаку делимости такое число без остатка делится на 5.

Ответ: доказано.

13. Используем свойства степеней и выполним действия:

$$\frac{x^{2n} \cdot y^{n-1} \cdot (x^n \cdot y^n)^2}{x^n \cdot (x^3 \cdot y^3)^n} = \frac{x^{2 \cdot n} \cdot y^{n+1} \cdot (x^{2 \cdot n} \cdot y^{2 \cdot n})}{x^n \cdot x^{3 \cdot n} \cdot y^{3 \cdot n}} = \frac{(x^{2 \cdot n} \cdot x^{2 \cdot n}) \cdot (y^{n+1} \cdot y^{2 \cdot n})}{(x^n \cdot x^{3 \cdot n}) \cdot y^{3 \cdot n}} =$$

$$= \frac{x^{2 \cdot n + 2 \cdot n} \cdot y^{n+1+2 \cdot n}}{x^{n+3 n} \cdot y^{3 n}} = \frac{x^{4 \cdot n} \cdot y^{3 \cdot n+1}}{x^{4 \cdot n} \cdot y^{3 \cdot n}} = y^{3 \cdot n+1-3 \cdot n} = y^1 = y.$$

Ответ: y.

14. Подметим закономерность в степенях числа 2: $2^{78} - 2^{77} =$ $= 2^{77}(2 - 1) = 2^{77}$, $2^{77} - 2^{76} = 2^{76}(2 - 1) = 2^{76}$ и т. д. Тогда уравнение имеет вид $3x = 1$, откуда $x = \frac{1}{3}$.

Ответ: $\frac{1}{3}$.

Глава 6. Многочлены. Арифметические операции над многочленами

§ 24. Основные понятия

Урок 59. Многочлен. Стандартный вид многочлена

Цель: дать понятие многочлена и его записи в стандартном виде, понятие степени многочлена.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Изучение нового материала

Многочленом называется алгебраическая сумма (т. е. сумма или разность) **одночленов. Одночлены, входящие в многочлен, называются членами многочлена.**

Пример 1

а) Выражения $3a^2-5ab^3$, $7x^3-5x^2y+3xy^5-10y^7+8$ являются многочленами, т. к. являются алгебраическими суммами одночленов (члены первого многочлена: $3a^2$ и $-5\ ab^3$, второго: $7x^3$, $5x^2y$, $3xy^5$, $-10y^7$, 8).

б) Выражения $3a^2-5a:b^3$, $(7x^3-5x^2):y+3xy^5-10:y^7$ не являются многочленами, т. к. состоят не только из одночленов (содержат операции деления).

Многочлен, состоящий из двух членов, называют **двучленом**; из трех членов – **трехчленом**.

В многочленах принято **алгебраические суммы подобных одночленов заменять одним одночленом**. Такая операция называется **приведением подобных членов.**

Пример 2

Упростить многочлен $A=7ab-3bc+ac-2ab-4bc+3ab+bc$.

В многочлене A есть две группы подобных одночленов: $7ab$, $-2ab$, $3ab$ и $-3bc$, $-4bc$, bc. Кроме того, есть многочлен ac, который не имеет себе подобных в многочлене A. Сгруппируем в A указанные группы одночленов, т. е. запишем A в виде $A=(7ab-2ab+3ab)+$ $+(-3bc-4bc+bc)+ac$. Далее учтем, что $7ab-2ab+3ab=ab\cdot(7-2+3)=$ $=ab\cdot 8=8ab$; $\quad -3bc-4bc+bc=bc\cdot(-3-4+1)=bc\cdot(-6)=-6bc$. Поэтому многочлен имеет вид $A=8ab-6bc+ac$.

Полученный **многочлен** A имеет **стандартный вид**, т. к. **каждый входящий в него одночлен записан в стандартном виде и приведены подобные члены.**

Больше ничего для записи многочлена в стандартном виде не требуется. Порядок слагаемых уже не важен. И, например, запись многочлена $A = ac + 8ab - 6bc$ также считается его стандартным видом.

Таким образом, в отличие от одночлена **многочлен** может быть **записан в стандартном виде не единственным способом, а несколькими.**

Степенью многочлена стандартного вида называют наибольшую из степеней, входящих в него одночленов. В примере 2 все одночлены, входящие в многочлен A, имели степень 2. Поэтому и данный многочлен имел степень 2. Для определения степени произвольного многочлена его предварительно надо записать в стандартном виде.

Пример 3

Записать в стандартном виде многочлен $A = 3ab \cdot 2bc - 3a^2bc + 2a(-b^2c) + ac(-4ab) + 2a(-4bc)$.

Прежде всего запишем каждый из входящих в A одночленов в стандартном виде: $A = 6ab^2c - 3a^2bc - 2ab^2c - 4a^2bc - 8abc$. Сгруппируем в A подобные члены: $A = (6ab^2c - 2ab^2c) + (-3a^2bc - 4a^2bc) - 8abc$.

Приведем в многочлене A подобные члены: $A = 4ab^2c - 7a^2bc - 8abc$. Полученная форма многочлена A есть его стандартный вид.

При другом расположении членов в многочлене A он также считается записанным в стандартном виде. Например, $A = -8abc - 7a^2bc + 4ab^2c$ или $A = -7a^2bc - 8abc + 4ab^2c$ также стандартный вид этого многочлена.

В многочлене A степень одночлена $4ab^2c$ равна 4, степень одночлена $7a^2bc$ – также 4 и степень одночлена $8abc$ равна 3. Поэтому наибольшая степень одночленов 4 и является степенью данного многочлена.

Если в многочлен входит только одна переменная, то его стандартным видом является такая форма записи, при которой одночлены располагаются в порядке убывания степеней переменной.

Пример 4

Записать в стандартном виде многочлен $A = 5x^2 \cdot (3x^3) \cdot x + 3x + 2x^3 - 7 + (2x^2)^2 - 5x^3$.

Прежде всего в многочлене A запишем каждый одночлен в стандартном виде: $A = 15x^6 + 3x + \underline{2x^3} - 7 + 4x^4 - \underline{5x^3}$. Затем приведем подобные члены (они подчеркнуты): $A=15x^6+3x-3x^3-7+4x^4$. И наконец, расположим члены в A в порядке убывания степеней x (начиная с наибольшей степени и кончая членом, который вообще не зависит от x). Тогда получим: $A=15x^6+4x^4-3x^3+3x-7$. Это и есть стандартный вид этого многочлена.

Заметим, что другое расположение слагаемых уже не даст стандартного вида многочлена. Например, форма записи $A=15x^6+4x^4+3x-3x^3-7$ уже не является стандартным видом многочлена A, т. к. слагаемое $3x$ расположено ранее слагаемого $(-3x^3)$.

Также отметим, что наивысшая степень одночлена, входящего в многочлен, считается степенью многочлена. В данном примере многочлен A имеет шестую степень.

Заметим, что **одночлен можно рассматривать как многочлен, состоящий из одного члена.**

Чтобы вычислить значение многочлена, надо вместо переменных подставить их значения.

Пример 5

а) Найдем значение многочлена $p(x)=3x^4-2x^3+1$ при $x=2$, т. е. $p(2)$.

Подставив в многочлен величину $x=2$, получим: $p(2)=3\cdot2^4-$ $-2\cdot2^3+1=3\cdot16-2\cdot8+1=48-16+1=33$.

б) Найдем значение многочлена $p(x;y)=5x^2y+3xy+y-3$ при $x=3$, $y=1$, т. е. $p(3;1)$.

Подставив в многочлен величины $x=3$, $y=1$, получим: $p(3;1)=5\cdot3^2\cdot1+3\cdot3\cdot1+1-3=45+9+1-3=52$.

III. Задание на уроке

№ 24.2; 24.4; 24.8 (а, б); 24.10; 24.13 (в, г); 24.17 (а); 24.19 (а, б); 24.20; 24.22 (в, г); 24.25 (а).

IV. Контрольные вопросы

1. Дайте определение многочлена. Приведите примеры многочленов: а) с одной переменной; б) с несколькими переменными.
2. Что называют членом многочлена?
3. Как привести многочлен к стандартному виду?
4. Что называют степенью многочлена?

V. Задание на дом

№ 24.3; 24.5; 24.8 (в, г); 24.11; 24.13 (а, б); 24.17 (б); 24.19 (в, г); 24.21; 24.2 (а, б); 24.25 (б).

VI. Подведение итогов урока

§ 25. Сложение и вычитание многочленов

Уроки 60–61. Сумма и разность многочленов

Цель: дать понятие об операциях сложения и вычитания.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Дайте определение многочлена. Как его привести к стандартному виду?

2. Запишите в стандартном виде многочлен $p(x;y)=6x^2y-3x(yx)+2yx\cdot x-2xy^2+3xy\cdot y$ и определите его степень. Найдите его значение при $x=-2$, $y=3$.

3. Запишите в виде многочлена двузначное число $\overline{ab}$.

Вариант 2

1. Дайте определение многочлена. Как определить его степень?

2. Запишите в стандартном виде многочлен $p(a;b)=3ab\cdot b^2+5(ab)^2+ab\cdot b^2-4a\cdot(ab)\cdot b$ и определите его степень. Найдите его значение при $a=2$, $b=-3$.

3. Запишите в виде многочлена трехзначное число $\overline{abc}$.

III. Изучение нового материала

Чтобы найти алгебраическую сумму многочленов, нужно раскрыть скобки и провести подобные члены. При этом, если перед скобкой стоит **знак «+»**, то **знаки слагаемых**, стоящих в скобках, **не меняются**. Если перед скобкой стоит **знак «–»**, то **знаки слагаемых** внутри скобок **меняются на противоположные**.

Пример 1

Найдем сумму многочленов $A=6a^2+3ab-2b^2$ и $B=-3a^2-5ab+4b^2$. Составим сумму этих многочленов. Учитывая правила, раскроем скобки и приведем подобные члены. Получаем: $A+B=(6a^2+3ab-2b^2)+(-3a^2-5ab+4b^2)=6a^2+3ab-2b^2-3a^2-5ab+4b^2=(6a^2-3a^2)+(3ab-5ab)+(-2b^2+4b^2)=3a^2-2ab+2b^2$.

Результатом сложения многочленов A и B также является многочлен $3a^2 - 2ab + 2b^2$.

Пример 2

Найдем разность многочленов A и B из примера 1. Составим разность этих многочленов, учитывая правила, раскроем скобки и приведем подобные члены. Получаем: $A - B = (6a^2 + 3ab - 2b^2) -$

$$-(-3a^2 - 5ab + 4b^2) = 6a^2 + 3ab - 2b^2 + 3a^2 + 5ab - 4b^2 =$$

$$= (6a^2 + 3a^2) + (3ab + 5ab) + (-2b^2 - 4b^2) = 9a^2 + 8ab - 6b^2.$$

Результатом вычитания многочленов A и B также является многочлен $9a^2 + 8ab - 6b^2$.

Разумеется, **можно складывать и вычитать любое количество многочленов.**

Пример 3

Найти многочлен $A + B - C$, если $A = a^2 - b^2 + 2ab$, $B = 2a^2 - 3ab - 4b^2$, $C = 4a^2 - 3ab - 7b^2$.

Получаем: $A + B - C = (a^2 - b^2 + 2ab) + (2a^2 - 3ab - 4b^2) - (4a^2 - 3ab - 7b^2) =$

$$= a^2 - b^2 + 2ab + 2a^2 - 3ab - 4b^2 - 4a^2 + 3ab + 7b^2.$$

Сгруппируем в полученном многочлене подобные члены, а затем приведем их: $A + B - C = (a^2 + 2a^2 - 4a^2) + (-b^2 - 4b^2 + 7b^2) +$

$$+ (2ab - 3ab + 3ab) = -a^2 + 2b^2 + 2ab.$$

При сложении и вычитании многочленов также получается многочлен.

Иногда требуется решить **обратную задачу – представить данный многочлен в виде суммы или разности многочленов.** При этом пользуются правилом (правило раскрытия скобок).

1. Если перед скобками ставится **знак «+»**, то **члены**, которые заключаются в скобки, **записываются с теми же знаками.**

2. Если перед скобками ставится **знак «–»**, то **члены**, которые заключаются в скобки, **записываются с противоположными знаками.**

Пример 4

Пусть дан многочлен $A = 2a^2 - 3ab + 4b^2$. Запишем его в виде суммы и разности двух многочленов.

а) $A = 2a^2 - 3ab + 4b^2 = 2a^2 + (-3ab + 4b^2)$. Данный многочлен A представлен в виде суммы многочленов $2a^2$ и $-3ab + 4b^2$.

б) $A = 2a^2 - 3ab + 4b^2 = 2a^2 - (3ab - 4b^2)$. Данный многочлен A представлен в виде разности многочленов $2a^2$ и $3ab - 4b^2$.

Очевидно, что **такое представление не единственно.** Например, многочлен A можно записать в виде суммы двух многочленов и другими способами: $A = (2a^2 - 3ab) + 4b^2$, или $A = (a^2 - 3ab) + (a^2 + 4b^2)$, или $A = (3a^2 - ab) + (-a^2 - 2ab + 4b^2)$ и т. д.

IV. Задание на уроках

№ 25.1; 25.4 (а, б); 25.5 (в); 25.6 (а); 25.7 (б); 25.8 (а, б); 25.1 (а, г); 25.13 (а).

V. Контрольные вопросы

1. Расскажите о правилах раскрытия скобок.
2. Как складываются и вычитаются многочлены?
3. Что является суммой и разностью многочленов?
4. Как представить многочлен в виде суммы и разности многочленов? Поясните на примерах.

VI. Задание на дом

№ 25.2; 25.4 (в, г); 25.5 (г); 25.6 (б); 25.7 (г); 25.8 (в, г); 25.11 (б, в); 25.13 (г).

VII. Подведение итогов уроков

§ 26. Умножение многочлена на одночлен

Уроки 62–63. Произведение многочлена и одночлена

Цель: рассмотреть операцию умножения многочлена и одночлена.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).
2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1. Упростите выражение $3x^2y-(2x^2y-xy)+(2xy-yx^2)$ и найдите его значение при $xy=-3$.
2. Докажите, что значение выражения $6a^2b^2+(3ab^2-2a^2b^2)-$ $-(4a^2b^2+ab^2)-2ab^2$ не зависит от значений переменных a и b.
3. Какой остаток при делении на 4 дает сумма четырех последовательных натуральных чисел?

Вариант 2

1. Упростите выражение $5xy^2-(3xy^2+xy)+(4xy-2y^2x)$ и найдите его значение при $xy=-4$.

2. Докажите, что значение выражения $5ab^2-(2ab^2+3a^2b)+$ $+(2a^2b-3ab^2)+a^2b$ не зависит от значений переменных a и b.

3. Какой остаток при делении на 5 дает сумма пяти последовательных натуральных чисел?

III. Изучение нового материала

Чтобы умножить многочлен и одночлен, нужно каждый член многочлена умножить на этот одночлен и полученные произведения алгебраически сложить.

Пример 1

Умножить многочлен $A=3a^2-2ab+b^2$ на одночлен $B=-2ab$.

Имеем: $A\cdot B=(3a^2-2ab+b^2)\cdot(-2ab)=3a^2\cdot(-2ab)-2ab\cdot(-2ab)+$ $+b^2\cdot(-2ab)=-6a^3b+4a^2b^2-2ab^3$.

Заметим, что если многочлен имеет стандартный вид, то в результате такого умножения также получается многочлен стандартного вида, который уже не нуждается в приведении подобных членов.

Пример 2

Умножим одночлен $A=-2a^2$ и многочлен $B=7a^3-5a^2+3a-4$. Получаем: $A\cdot B=-2a^2\cdot(7a^3-5a^2+3a-4)=-2a^2\cdot7a^3-2a^2\cdot(-5a^2)-$ $-2a^2\cdot3a-2a^2\cdot(-4)=-14a^5+10a^4-6a^3+8a^2$. Полученный многочлен имеет стандартный вид. Заметим, что промежуточные результаты можно не записывать. Тогда запись такого умножения выглядит короче: $A\cdot B=-2a^2\cdot(7a^3-5a^2+3a-4)=-14a^5+10a^4-6a^3+8a^2$.

Разумеется, **многочлен можно умножить и на несколько одночленов**. Сделать это можно **двумя способами**:

1) умножить многочлен сначала на первый одночлен. В результате получается новый многочлен, который затем умножается на второй одночлен и т. д.;

2) перемножить все одночлены. В результате получается новый одночлен, который затем умножается на данный многочлен.

Пример 3

Умножим многочлен $A=3a^2-2ab+5b^2$ на одночлены $B=2a^2$ и $C=ab$.

Сделаем эту задачу двумя перечисленными способами.

1-й способ

Умножим многочлен A и одночлен B. Получаем новый многочлен $D=A\cdot B=(3a^2-2ab+5b^2)\cdot2a^2=6a^4-4a^3b+10a^2b^2$. Теперь умножим многочлен D и одночлен C. Получаем окончательный ответ – многочлен $F = D \cdot C = (6a^4 - 4a^3b + 10a^2b^2) \cdot ab = 6a^5b - 4a^4b^2 + 10a^3b^3$.

2-й способ

Перемножим одночлены B и C. Получаем новый одночлен $E = B \cdot C = 2a^2 \cdot ab = 2a^3b$. Теперь умножим данный многочлен A на новый одночлен E. Получаем окончательный ответ – многочлен $F = A \cdot E = (3a^2 - 2ab + 5b^2) \cdot 2a^3b = 6a^5b - 4a^4b^2 + 10a^3b^3$.

Разумеется, ответы совпадают в соответствии с сочетательным свойством умножения: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$. Однако даже при двух одночленах **второй способ** решения является **более простым.**

Навыки умножения многочлена и одночлена используются **при преобразованиях выражений, решении уравнений и текстовых задач.**

Пример 4

Упростим выражение $A = a(a + b - c) - b(a - b - c) + c(a - b + c)$ и вычислим его значение при $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$.

Получаем: $A = a(a + b - c) - b(a - b - c) + c(a - b + c) = a^2 + ab - ac - ab + b^2 + bc + ca - cb + c^2 = a^2 + b^2 + c^2$. Было учтено переместительное свойство умножения: $ba = ab$, $ca = ac$ и $cb = bc$. Найдем значение выражения $A = a^2 + b^2 + c^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 1 + 4 + 9 = 14$.

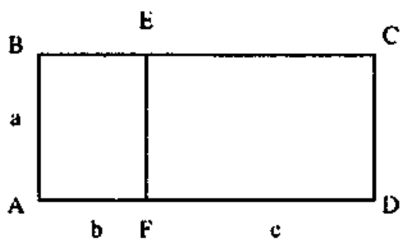
Пример 5

Докажем, что выражение $A = 2a^2(a+b) - 3b(a^2+b) + a^2(b-2a) + 3b^2$ принимает одно и то же значение при любых значениях переменных a и b.

Раскроем скобки и получаем: $A = 2a^3 + 2a^2b - 3ba^2 - 3b^2 + a^2b - 2a^3 + 3b^2 = 0$. Вновь было учтено переместительное свойство умножения: $a^2b = ba^2$.

Пример 6

На простейшем примере обоснуем геометрически правило умножения одночлена и многочлена, т. е. распределительный закон $a(b + c) = ab + ac$.



Рассмотрим прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = a$ и $AD = b + c$. Его площадь $S_{ABCD} = AB \cdot AD = a(b + c)$. Этот прямоугольник $ABCD$ состоит из прямоугольников: $ABEF$ со сторонами $AB = a$ и $AF = b$ и площадью $S_{ABEF} = AB \cdot AF = a \cdot b$ и $FECD$ со сторонами $EF = a$ и $FD = c$ и площадью $S_{FECD} = EF \cdot FD = a \cdot c$. Очевидно, что $S_{ABCD} = S_{ADEF} + S_{FECD}$ или $a(b + c) = ab + ac$.

IV. Задание на уроках

№ 26.4 (а, г); 26.6 (б); 26.8 (а, в); 26.9 (г); 26.11; 26.15 (б, г); 26.18; 26.22; 26.24; 26.27; 26.30.

V. Контрольные вопросы

1. Как умножить многочлен и одночлен? Приведите примеры.
2. Какое свойство умножения используется при умножении многочлена и одночлена?

VI. Задание на дом

№ 26.4 (б, в); 26.6 (г); 26.8 (б, г); 26.9 (б); 26.12; 26.15 (а, В); 26.19; 26.23; 26.25; 26.28; 26.31.

VII. Подведение итогов уроков

§ 27. Умножение многочлена на многочлен

Уроки 64–65. Произведение многочленов

Цель: отработать навыки умножения многочленов.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).
2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1. Выполните умножение:

а) $-3x^2y(x - y + y^2)$;

б) $2xy(x - 2y^2 + 3xy) \cdot (-3x^2)$.

2. Упростите выражение $2(3x^2-5x+1)-3(2x^2-4x+3)$ и вычислите его значение при $x=-2$.

3. Представьте выражение $3xy(2y-x)-2y^2(x+y^2)$ в виде многочлена и определите его степень.

Вариант 2

1. Выполните умножение:

а) $-2xy^2(2y-3x+x^2)$;

б) $3xy(2x-3x^2+4xy)\cdot(-2y^2)$.

2. Упростите выражение $4(x^2-3x+2)-2(2x^2-5x+1)$ и вычислите его значение при $x=-3$.

3. Представьте выражение $2xy(x-y)-3x^2(x+y^2)$ в виде многочлена и определите его степень.

III. Изучение нового материала

Чтобы умножить многочлен на многочлен, нужно умножить каждый член одного многочлена на каждый член другого многочлена и полученные произведения алгебраически сложить.

Пример 1

Умножить многочлены $A=3a-2b$ и $B=2a+3b$.

Выполним умножение поэтапно: умножим каждый член, входящий в A, на многочлен B, а затем умножим одночлены на многочлен (в соответствии с предыдущим пунктом). Тогда получаем: $A\cdot B=(3a-2b)\cdot(2a+3b)=3a(2a+3b)-2b(2a+3b)=6a^2+9ab-4ba-6b^2$.

Теперь осталось только привести подобные члены: $A\cdot B=6a^2+5ab-6b^2$ (здесь учтено, что $ba=ab$).

Заметим, что **результатом умножения многочленов** также **является многочлен**. При этом если один множитель состоял из m членов, а второй – из n членов, то в произведении (до приведения подобных членов) будет $m\cdot n$ членов. Этим соображением можно пользоваться для контроля преобразований. В рассмотренном примере многочлены A и B состояли из двух членов, поэтому в многочлене $A\cdot B=6a^2+9ab-4ba-6b^2$ имеется $2\cdot 2=4$ члена.

В случае **несколько многочленов умножение выполняется поочередно**, при этом **после очередного умножения приводятся подобные члены.**

Пример 2

Умножим многочлены $A=a-2b$, $B=2a+3b$, $C=3a+b$.

Умножим сначала многочлены A и B: $A\cdot B=(a-2b)(a+3b)=$
$=a\cdot(2a+3b)-2b(2a+3b)=2a^2+3ab-4ba-6b^2=2a^2-ab-6b^2$.

Теперь полученный многочлен умножим на C: $(A \cdot B) \cdot C = (2a^2 - ab - 6b^2)(3a + b) = (2a^2 - ab - 6b^2) \cdot 3a + (2a^2 - ab - 6b^2) \cdot b = 6a^3 - 3a^2b - 18ab^2 + 2a^2b - ab^2 - 6b^3 = 6a^3 - a^2b - 19ab^2 - 6b^3$.

Умножение многочленов используется в преобразованиях выражений, при решении уравнений, в задачах на делимость чисел и т.д.

Пример 3

Упростите выражение $A = (a^3 + 2b)(a^2 - 2b) - (a^2 + 2b)(a^3 - 2b)$.

Чтобы преобразовать выражение A, перемножим входящие в него многочлены и приведем подобные члены. Получаем: $A = a^3 \cdot a^2 - a^3 \cdot 2b + 2b \cdot a^2 + 2b \cdot (-2b) - a^2 \cdot a^3 - a^2 \cdot (-2b) - 2b \cdot a^3 - 2b \cdot (-2b) = a^5 - 2a^3b + 2a^2b - 4b^2 - a^5 + 2a^2b - 2a^3b + 4b^2 = -4a^3b + 4a^2b = 4a^2b(1 - a)$.

Пример 4

Решите уравнение $(3x + 2)(2x + 3) - (x + 4)(x - 2) = (5x + 2)(x - 1)$.

Преобразуем обе части уравнения, перемножая многочлены и приводя подобные члены. Получаем: $6x^2 + 9x + 4x + 6 - x^2 + 2x - 4x + 8 = 5x^2 - 5x + 2x - 2$, или $11x + 14 = -3x - 2$, или $11x + 3x = -14 - 2$, или $14x = -16$, откуда $x = -\frac{16}{14} = -\frac{8}{7} = -1\frac{1}{7}$.

Пример 5

Докажите, что при любом натуральном значении n значение выражения $A = (n + 1)(n + 2) - (3n - 1)(n + 3) + 5\,n(n + 2) + n + 7$ кратно 3.

Перемножим многочлены и приведем подобные члены. Имеем: $A = n^2 + 2n + n + 2 - 3n^2 - 9n + n + 3 + 5n^2 + 10n + n + 7 = 3n^2 + 6n + 3 = 3 \cdot (n^2 + 2n + 1)$. При любом натуральном n значение выражения $n^2 + 2n + 1$ является натуральным числом. Поэтому значение выражения A кратно 3 при любом натуральном значении n.

IV. Задание на уроках

№ 27.3 (б); 27.5 (г); 27.9 (а, б); 27.11 (г); 27.12 (а, б); 27.14; 27.20 (а, б); 27.22 (в); 27.25.

V. Контрольные вопросы

1. Как умножить многочлены? Приведите примеры.
2. Какое выражение является результатом умножения многочленов?

VI. Задание на дом

№ 27.3 (в); 27.5 (б); 27.9 (б, г); 27.11 (в); 27.12 (в, г); 27.16; 27.20 (в, г); 27.22 (а); 27.26.

VII. Подведение итогов уроков

§ 28. Формулы сокращенного умножения

Уроки 66–67. Формулы квадрата суммы и разности

Цель: познакомиться с некоторыми формулами сокращенного умножения многочленов.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Как умножить многочлены?
2. Перемножьте многочлены:
   а) $(a-2b)(4a+3b)$;
   б) $(2ab-3)(3a+b-2)$.
3. Решите уравнение $(2x-3)(3x+4)=8+(3x-1)(2x+3)$.
4. Докажите, что если натуральные числа m и n при делении на 3 дают в остатке 2, то их произведение mn при делении на 3 дает в остатке 1.

Вариант 2

1. Какое выражение является результатом умножения многочленов?
2. Перемножьте многочлены:
   а) $(2a-b)(3a+4b)$;
   б) $(3ab-2)(2a+b-3)$.
3. Решите уравнение $(4x-3)(2x+1)=5+(2x-3)(4x+1)$.
4. Докажите, что если натуральные числа m и n при делении на 4 дают в остатке 2, то их произведение mn при делении на 4 дает в остатке 0 (т. е. кратно 4).

III. Изучение нового материала

В ряде случаев при умножении многочленов определенного вида удобнее использовать готовые формулы (**формулы сокращенного умножения**), чем перемножать такие многочлены.

При перемножении многочленов и приведении их к стандартному виду, а также при решении многих других задач очень полезными оказываются **формулы сокращенного умножения**.

Прежде всего рассмотрим формулы для возведения в **квадрат суммы и разности двух выражений**.

(1) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (квадрат суммы двух чисел равен квадрату первого числа плюс удвоенное произведение первого числа на второе плюс квадрат второго числа).

(2) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ (квадрат разности двух чисел равен квадрату первого числа минус удвоенное произведение первого числа на второе плюс квадрат второго числа).

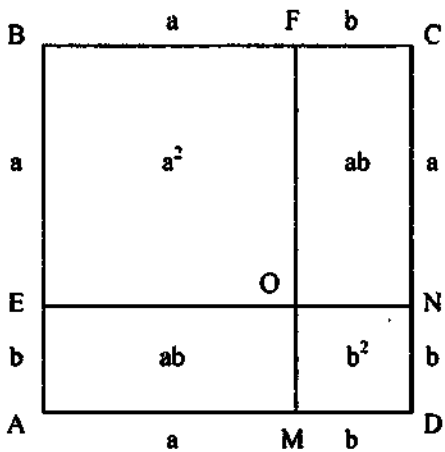
Тождество (1) называют **формулой квадрата суммы**, тождество (2) – **формулой квадрата разности**. Эти формулы позволяют проще возводить в квадрат сумму или разность любых двух чисел (выражений). Формулы (1) и (2) можно получить алгебраическим и геометрическим способами.

Выведем формулу $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

а) Алгебраический способ.

По определению $A = (a + b)^2 = (a + b)(a + b)$. Перемножим эти многочлены: $A = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

б) Геометрический способ.



Рассмотрим квадрат $ABCD$ со стороной $a + b$. Его площадь, очевидно, равна $(a + b)^2$.

Теперь на расстоянии a от вершины B проведем прямые EN и FM, параллельные сторонам квадрата. Эти прямые разбили нашу фигуру на квадрат $BFOE$ (со стороной a и площадью a^2), квадрат $OMDN$ (со стороной b и площадью b^2) и два прямоугольника $AEOM$ и $FONC$ (со сторонами a и b и площадью ab).

Так как эти четыре фигуры полностью расположены внутри исходного квадрата, то сумма их площадей $a^2 + b^2 + 2ab$ равна площади большого квадрата $(a + b)^2$. Поэтому получаем: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Заметим, что формула квадрата суммы была получена древнегреческими математиками еще до нашей эры (свыше 2000 лет назад) именно геометрическим способом. Видно, что применение алгебры позволяет значительно упростить и ускорить вывод формул.

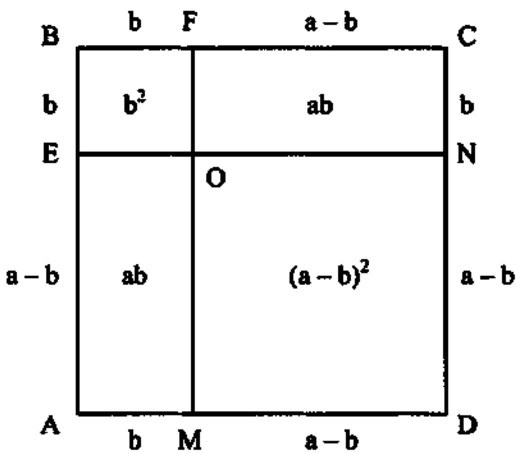
Теперь выведем формулу $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

а) Алгебраический способ.

По определению $A = (a - b)^2 = (a - b)(a - b)$. Перемножим эти многочлены: $A = (a - b)(a - b) = a(a - b) - b(a - b) = a^2 - ab - ba + b^2$. Приведем теперь подобные члены и получим: $A = a^2 - 2ab + b^2$.

Заметим, что эту формулу можно вывести и из формулы (1), заменив операцию вычитания операцией сложения: $a - b = a + (-b)$. Тогда получаем: $(a - b)^2 = (a + (-b))^2 = a^2 + 2a\cdot(-b) + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

б) Геометрический способ.



Для определенности будем считать, что $a > b$. Рассмотрим квадрат $ABCD$ со стороной a. Его площадь, очевидно, равна a^2.

Теперь на расстоянии b от вершины B проведем прямые EN и FM, параллельные сторонам квадрата. Эти прямые разбили фигуру на квадрат $BFOE$ (со стороной b и площадью b^2 и два прямоугольника $ABFM$ и $BCNE$ (со сторонами a и b и площадью ab).

Площадь квадрата $OMDN$ (равная $(a - b)^2$) получится, если из площади квадрата $ABCD$ (равной a^2) вычесть площади двух прямоугольников $ABFM$ и $BCNE$ (каждая из которых равна ab) и добавить площадь квадрата $BFOE$ (равную b^2). Поэтому получаем: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Рассмотрим примеры применения формулы квадрата суммы и квадрата разности.

Пример 1

Вычислим 52^2. Запишем число 52 в виде $52 = 50 + 2$ и используем формулу квадрата суммы:

$52^2 = (50 + 2)^2 = 50^2 + 2 \cdot 50 \cdot 2 + 2^2 = 2500 + 200 + 4 = 2704.$

Пример 2

Найдем 49^2. Запишем число 49 в виде $49 = 50 - 1$ и используем формулу квадрата разности:

$49^2 = (50 - 1)^2 = 50^2 - 2 \cdot 50 + 1^2 = 2500 - 100 + 1 = 2401.$

Пример 3

Возведем в квадрат сумму $5a + 3b$. По формуле квадрата суммы получаем:

$(5a + 3b)^2 = (5a)^2 + 2 \cdot 5a \cdot 3b + (3b)^2 = 25a^2 + 30ab + 9b^2.$

Пример 4

Возведем в квадрат разность $7a - 2b$. По формуле квадрата разности имеем:

$(7a - 2b)^2 = (7a)^2 - 2 \cdot 7a \cdot 2b + (2b)^2 = 49a^2 - 28ab + 4b^2.$

Пример 5

Доказать, что выражение $A = (a - 4)^2 - 2(a + 8)(a - 4) + (a + 8)^2$ не зависит от a, и найти величину A.

Запишем выражение A в виде $A = (a - 4)^2 - 2(a - 4)(a + 8) + (a + 8)^2$. Теперь легко сообразить, что выражение A является квадратом разности чисел $(a - 4)$ и $(a + 8)$. Поэтому получаем:

$A = ((a - 4) - (a + 8))^2 = (a - 4 - a - 8)^2 = (-12)^2 = 144$. Действительно, выражение A не зависит от a, и $A = 144$.

Пример 6

Упростим выражение $(4a + 3b)^2 - 2a(8a + 12b) - (2b)^2$.

Используем формулу квадрата суммы, раскроем скобки и приведем подобные члены. Получаем:

$(4a + 3b)^2 - 2a(8a + 12b) - (2b)^2 = (4a)^2 + 2 \cdot 4a \cdot 3b + (3b)^2 - 2a \cdot 8a - 2a \cdot 12b - 4b^2 = 16a^2 + 24ab + 9b^2 - 16a^2 - 24ab - 4b^2 = 5b^2.$

Пример 7

Найдем наименьшее значение выражения $A = 2a^2 - 4a + 10$.

В данном выражении вынесем общий множитель 2 за скобки: $A = 2(a^2 - 2a + 5)$. В выражении $a^2 - 2a + 5$ выделим полный квадрат разности: $a^2 - 2a + 5 = (a^2 - 2a + 1) + 4 = (a^2 - 2 \cdot a \cdot 1 + 1^2) + 4 = (a - 1)^2 + 4$. Поэтому данное выражение можно записать в виде $A = 2((a - 1)^2 + 4) = 2(a - 1)^2 + 8$. Очевидно, что слагаемое $2(a - 1)^2 \geq 0$. Выражение A будет принимать наименьшее значение, если слагаемое $2(a - 1)^2$ будет наименьшим, т. е. $2(a - 1)^2 = 0$. Это выполняется, если

$a - 1 = 0$, т. е. $a = 1$. Тогда наименьшее значение данного выражения $A = 2 \cdot (1 - 1)^2 + 8 = 2 \cdot 0^2 + 8 = 8$.

Пример 8

Докажем, что при всех значениях переменных a и b значение выражения $A = 2a^2 + b^2 - 2ab + 4a + 6$ больше 1. В данное выражение входят две переменные a и b. Представим слагаемое $2a^2$ в виде $2a^2 = a^2 + a^2$ и сгруппируем члены выражения: $A = a^2 + b^2 - 2ab + a^2 + 4a + 6 = (a^2 - 2ab + b^2) + a^2 + 4a + 6$. Выражение в скобках является квадратом разности $a - b$. Чтобы в оставшихся слагаемых выделить квадрат суммы, представим число 6 в виде суммы чисел: $6 = 4 + 2$. Тогда выражение A имеет вид $A = (a^2 - 2ab + b^2) + (a^2 + 4a + 4) + 2 = (a - b)^2 + (a + 2)^2 + 2$. При всех значениях переменных a и b выражение $(a - b)^2 \geq 0$ и $(a + 2)^2 \geq 0$, поэтому данное выражение $A \geq 2$ и тем более $A > 1$.

IV. Задание на уроках

№ 28.3 (а, б); 28.6 (в, г); 28.8 (а, б); 28.14 (а, в); 28.16 (а, б); 28.18 (в, г); 28.19 (а, б).

V. Контрольные вопросы

1. Напишите формулу квадрата суммы и дайте ее формулировку словами.
2. Выведите формулу квадрата суммы алгебраическим способом.
3. Выведите формулу квадрата суммы геометрическим способом.
4. Напишите формулу квадрата разности и дайте ее формулировку словами.
5. Выведите формулу разности алгебраическим способом.
6. Выведите формулу разности геометрическим способом.

VI. Задание на дом

№ 28.3 (в, г); 28.6 (а, б); 28.8 (в, г); 28.14 (б, г); 2816 (в, г); 28.18 (а, б); 28.19 (в, г).

VII. Творческие задания

1. Найдите наименьшее (или наибольшее) значение выражения. При каком значении переменных оно достигается?

а) $x^2 - 4x + 7$;
б) $y^2 - 6y + 1$;
в) $6 + x - x^2$;
г) $3 - 4y - y^2$;
д) $x^2 + 2x + y^2$;
е) $x^2 - 4xy + 5y^2$;
ж) $x^2 - 4x + y^2 + 6y + 5$.

Ответы: а) 3 при $x = 2$; б) -8 при $y = 3$; в) $6\frac{1}{4}$ при $x = \frac{1}{2}$; г) 7 при $y = -2$; д) -1 при $x = -1$, $y = 0$; е) 0 при $x = y = 0$; ж) -8 при $x = 2$, $y = -3$.

2. Докажите неравенство:

а) $x^2 + 4x \geq -4$;
б) $y^2 + 9 \geq 6y$;
в) $x^2 + y^2 \geq 2xy$;
г) $x^2 + 4y^2 \geq -4xy$;
д) $-x^2 + 10x < 26$;
е) $-y^2 + 8y - 16 < 5$;
ж) $x^2 + 4x + y^2 - 8y + 25 > 3$;
з) $2x^2 + 4xy + 4y^2 - 2x > -2$;
и) $x^2 - 2xy + 5y^2 + 4y > -5$.

VIII. Подведение итогов уроков

Урок 68. Разность квадратов

Цель: продолжить изучение формул сокращенного умножения.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Напишите формулу квадрата суммы и дайте ее формулировку словами.

2. Представьте в виде многочлена:

а) $(2a + 7b)^2$;
б) $(3a^2 - 4b^3)^2$.

3. Упростите выражение $(3a - 2b)^2 - 3a(3a - 4b)$ и найдите его значение при $b = \frac{1}{2}$.

4. Найдите значение выражения $(a - 3)^2 + (6 - a)^2 + 2(a - 3)(6 - a)$.

Вариант 2

1. Напишите формулу квадрата разности и дайте ее формулировку словами.

2. Представьте в виде многочлена:

а) $(3a + 5b)^2$;
б) $(2a^2 - 6b^3)^2$.

3. Упростите выражение $(2a - 3b)^2 - 3b(3b - 4a)$ и найдите его значение при $a = -\frac{1}{2}$.

4. Найдите значение выражения $(a - 2)^2 + (5 + a)^2 - 2(a - 2)(5 + a)$.

III. Изучение нового материала

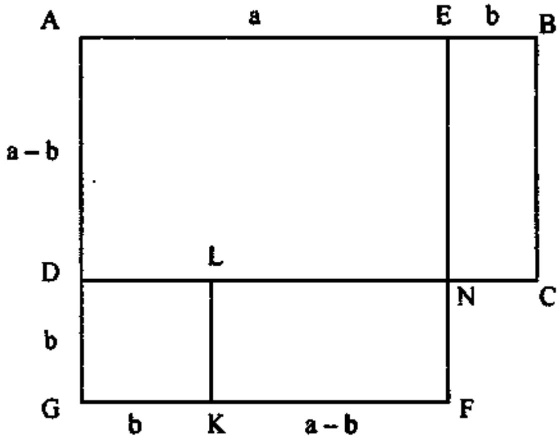
Приведем еще одну формулу сокращенного умножения: $(a-b)(a+b)=$ $=a^2-b^2$ (3), которая позволяет быстро **умножать разность и сумму одних и тех же чисел a и b**. Выведем эту формулу.

а) Алгебраический способ.

Умножим разность чисел $a-b$ на их сумму $a+b$.

Получаем: $(a-b)(a+b)=a^2+ab-ba-b^2=a^2-b^2$.

б) Геометрический способ.



Рассмотрим фигуру, изображенную на рисунке. Стороны прямоугольника $ABCD$ равны: $AB=a+b$ и $AD=a-b$ (для определенности считаем, что $a, b>0$ и $a>b$) и его площадь $S=AD\cdot AB=(a-b)(a+b)$. Этот прямоугольник состоит из прямоугольников $AEND$ и $EBCN$. Прямоугольник $EBCN$ равен прямоугольнику $KLNF$. Поэтому площадь S равна площади фигуры $AENFKL$, которая равна разности площадей квадрата $AEFG$ (со стороной a) и $DLKG$ (со стороной b), т. е. $S=a^2-b^2$. Приравняв два выражения для площади S, получаем равенство $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$.

В соответствии с тождеством (3) **произведение разности чисел выражений на их сумму равно разности квадратов этих чисел (выражений)**. Тождество (3) широко используется при алгебраических преобразованиях выражений.

Пример 1

Умножим числа 47 и 53, записав их в виде разности и суммы двух чисел: $47=50-3$ и $53=50+3$. Тогда получаем, используя формулу (3): $47\cdot 53=(50-3)(50+3)=50^2-3^2=2500-9=2491$.

Пример 2

Сравним числа $A=141\cdot 144\cdot 148\cdot 151$ и $B=146^4$.

Получаем: $141 = 146 - 5$, $144 = 146 - 2$, $148 = 146 + 2$, $151 = 146 + 5$.

Тогда число A имеет вид $A = (146 - 5)(146 - 2)(146 + 2)(146 + 5)$. Изменим порядок умножения сомножителей, перемножив сначала два крайних числа, а затем два средних.

Получаем $A = (146 - 5)(146 + 5)(146 - 2)(146 + 2)$. Используя формулу (3), имеем $A = (146^2 - 5^2)(146^2 - 2^2)$. Очевидно, что в таком произведении каждый множитель меньше числа 146^2, т. е. $146^2 - 5^2 < 146^2$ и $146^2 - 2^2 < 146^2$. Поэтому произведение меньше $146^2 \cdot 146^2 = 146^{2+2} = 146^4 = B$. Таким образом, число A меньше числа B, т. е. $A < B$.

Пример 3

Умножим выражения $4a - 5b$ и $4a + 5b$.

Используя формулу (3) и правила действий со степенями, получим:
$(4a - 5b)(4a + 5b) = (4a)^2 - (5b)^2 = 16a^2 - 25b^2$.

Пример 4

Представим в виде многочлена выражение $(3a^3 - 2b^2)(3a^3 + 2b^2)$.

Применим тождество (3) и получим:
$(3a^3 - 2b^2)(3a^3 + 2b^2) = (3a^3)^2 - (2b^2)^2 = 9a^6 - 4b^4$.

Пример 5

Умножим выражения $-6a - 5b$ и $6a - 5b$.

В первом выражении $-6a - 5b$ вынесем за скобки число (-1) и получим:
$(-6a - 5b)(6a - 5b) = (-1)(6a + 5b)(6a - 5b) = -((6a)^2 - (5b)^2) = -(35a^2 - 25b^2) = 25b^2 - 36a^2$.

Заметим, что преобразование можно выполнить и сразу:
$(-6a - 5b)(6a - 5b) = (-5b - 6a)(-5b + 6a) = (-5b)^2 - (6a)^2 = 25b^2 - 36a^2$.

Пример 6

Упростим выражение $(6a - 7b)(6a + 7b) - (3a + 4b)(12a - 17b) - 3ab$.

Раскроем скобки, причем для первого произведения используем тождество (3). Получаем:
$(6a - 7b)(6a + 7b) - (3a + 4b)(12a - 17b) - 3ab = (6a)^2 - (7b)^2 - (36a^2 - 51ab + 48ab - 68b^2) - 3ab = 36a^2 - 49b^2 - (36a^2 - 3ab - 68b^2) - 3ab = 36a^2 - 49b^2 - 36a^2 + 3ab + 68b^2 - 3ab = 19b^2$.

IV. Задание на уроке

№ 28.20 (а); 28.22 (в); 28.26 (б); 28.27; 28.29; 28.36 (а, б); 28.39 (а); 28.41 (в, г); 28.43 (а).

V. Контрольные вопросы

1. Напишите формулу для произведения разности и суммы чисел. Дайте ее словесную формулировку.

2. Выведите формулу для произведения разности и суммы чисел алгебраическим способом.

3. Выведите формулу для произведения разности и суммы чисел геометрическим способом.

VI. Задание на дом

№ 28.20 (б); 28.22 (а); 28.26 (г); 28.28; 28.30; 28.36 (в, г); 28.39 (г); 28.41 (а, б); 28.43 (г).

VII. Творческие задания

1. Выполните действия:

а) $97 \cdot 103$;

б) $95 \cdot 97 \cdot 103 \cdot 105$;

в) $98 \cdot 100 \cdot 102$;

г) $(3 - 1)(3 + 1)(3^2 + 1)(3^4 + 1)$;

д) $(2 + 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)$;

е) $(a - b)(a + b)(a^2 + b^2)(a^4 + b^4)$;

ж) $(b + c)(b^4 + c^4)(b^2 + c^2)(b - c)$;

з) $(a + b)(a^2 + b^2)(a - b) + (a^2 - b^2) + 2a^2b^2$.

Ответы: а) 9991; б) 99 996 375; в) 999 600; г) $3^8 - 1$; д) $2^{16} - 1$ (умножить выражение на $2 - 1 = 1$); е) $a^8 - b^8$; ж) $b^8 - c^8$ (изменить порядок умножения); з) $2a^4$.

2. Сравните числа:

а) $43 \cdot 47$ и 45^2;

б) $81 \cdot 87$ и 84^2;

в) $164 \cdot 168$ и 167^2;

г) $153 \cdot 155 \cdot 157$ и 155^3;

д) $232 \cdot 233 \cdot 236$ и 234^3;

е) $114 \cdot 116 \cdot 120 \cdot 122$ и 118^4;

ж) $132 \cdot 138 \cdot 254 \cdot 258$ и $(135 \cdot 256)^2$.

Ответы: первые числа меньше, чем вторые.

VIII. Подведение итогов урока

Урок 69. Разность кубов и сумма кубов

Цель: завершить изучение формул сокращенного умножения.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1. Вычислите произведение чисел:

а) $97 \cdot 103$;

б) $17{,}7 \cdot 18{,}3$.

2. Выполните умножение:

а) $(3a - 4b)(3a + 4b)$;

б) $(-6a - 5b)(6a - 5b)$.

3. Упростите выражение $(2a - 3b)(2a + 3b) + 9b\,(b + 1)$.

Вариант 2

1. Вычислите произведение чисел:

а) $104 \cdot 96$;

б) $15{,}7 \cdot 16{,}3$.

2. Выполните умножение:

а) $(2b - 3a)(2b + 3a)$;

б) $(-4a - 5b)(4a - 5b)$.

3. Упростите выражение $(3a - 4b)(3a + 4b) - 9a\,(a - 1)$.

III. Изучение нового материала

Приведем еще две формулы сокращенного умножения:

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ (4).

Это тождество называют **формулой суммы кубов.** Заметим, что выражение $a^2 - ab + b^2$ называют неполным квадратом разности a и b (отличается от полного квадрата разности $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ тем, что вместо удвоенного произведения чисел a и b стоит просто их произведение). По формуле (4) **сумма кубов двух чисел** (выражений) **равна произведению суммы этих чисел** (выражений) $a + b$ и **неполного квадрата их разности** $a^2 - ab + b^2$.

Выведем формулу (4) алгебраическим способом, преобразовав правую часть в левую. Получаем, умножив два многочлена: $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a(a^2 - ab + b^2) + b(a^2 - ab + b^2) = a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 + b^3 = a^3 + b^3$. Заметим, что формулу (4) можно получить и геометрическим способом, рассмотрев объемы параллелепипедов.

Формула разности кубов имеет аналогичный вид:
$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ (5).

Разность кубов дух чисел (выражений) равна произведению разности этих чисел (выражений) $a - b$ и неполного квадрата их суммы $a^2 + ab + b^2$.

Формулу (5) можно получить аналогично формуле (4), умножив многочлены: $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a(a^2 + ab + b^2) - b(a^2 + ab + b^2) = a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3 = a^3 - b^3$.

Формулу (4) можно непосредственно получить из выражения (4): $a^3 - b^3 = a^3 + (-b)^3 = (a + (-b)) \cdot (a^2 - a(-b) + (-b)^2) = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.

Пример 1

Докажем, что выражение $123^3 + 27^3$ кратно 150. Используем формулу (4) и получим: $123^3 + 27^3 = (123 + 27)\cdot(123^2 - 123 \cdot 27 + 27^2) = 150 \cdot (123^2 - 123 \cdot 28 + 27^2)$. Видно, что данное выражение без остатка делится на 150.

Пример 2

Вычислим значение выражения $\frac{117^3 - 23^3}{94} + 117 \cdot 23$ без калькулятора.

Используем формулу (5) и формулу квадрата суммы. Получаем:

$$\frac{117^3 - 23^3}{94} + 117 \cdot 23 = \frac{(117 - 23)(117^2 + 117 \cdot 23 + 23^2)}{94} + 117 \cdot 23 =$$

$$= \frac{94 \cdot (117^2 + 117 \cdot 23 + 23^2)}{94} + 117 \cdot 23 = 117^2 + 117 \cdot 23 + 23^2 + 117 \cdot 23 =$$

$$= 117^2 + 2 \cdot 117 \cdot 23 + 23^2 = (117 + 23)^2 = 140^2 = 19\,600.$$

Пример 3

Разложим на множители двучлен $8m^3 + n^3$.

Применим формулу (4) и получим: $8m^3 + n^3 = (2m)^3 + n^3 = (2m + n)\cdot((2m)^2 - 2m \cdot n + n^2) = (2m + n)(4m^2 - 2mn + n^2)$.

Пример 4

Разложим на множители выражение $64a^3 - 27b^6$.

Представим величины $64a^3$ и $27b^6$ в виде кубов величин $4a$ и $3b^2$. Используем формулу (5), имеем: $64a^3 - 27b^6 = (4a)^3 - (3b^2)^3 = (4a - 3b^2)((4a)^2 + 4a \cdot 3b^2 + (3b^2)^2) = (4a - 3b^2)(16a^2 + 12ab^2 + 9b^4)$.

Пример 5

Докажем, что при всех натуральных n значение выражения $(3n + 2)^3 + (4n + 5)^3$ кратно 7.

Применим формулу (4) и получим: $(3n + 2)^3 + (4n + 5)^3 = ((3n + 2) + (4n + 5))((3n + 2)^2 - (3n + 2)(4n + 5) + (4n + 5)^2) = (7n + 7)\cdot((3n + 2)^2 -$

$-(3n+2)(4n+5)+(4n+5)^2) = 7\cdot(n+1)\cdot((3n+2)^2-(3n+2)(4n+5)+$
$+(4n+5)^2)$.

Видно, что данное выражение имеет множитель 7, поэтому оно кратно 7.

Пример 6

Упростим выражение $(2a-b)(4a^2+2ab+b^2)+(a+b)\cdot(a^2-ab+b^2)$.

Используем соответственно формулы (4) и (5) и получим: $(2a-b)(4a^2+2ab+b^2)+(a+b)\cdot(a^2-ab+b^2)=(2a)^3-b^3+a^3+b^3=$
$=8a^3+a^3=9a^3$.

IV. Задание на уроке

№ 28.31 (а, г); 28.32 (б, в); 28.47 (а, б); 28.53 (в, г); 28.63 (а, б).

V. Контрольные вопросы

1. Напишите формулу суммы кубов. Дайте ее словесную формулировку.
2. Выведите формулу суммы кубов алгебраическим способом.
3. Напишите формулу разности кубов. Дайте ее словесную формулировку.
4. Выведите формулу разности кубов алгебраическим способом.

VI. Задание на дом

№ 28.31 (б, в); 28.32 (а, г); 28.47 (в, г); 28.53 (а, б); 28.63 (в, г).

VII. Подведение итогов урока

§ 29. Деление многочлена на одночлен

Урок 70. Частное от деления многочлена на одночлен

Цель: рассмотреть операцию деления многочлена и одночлена.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).
2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Напишите формулу суммы кубов. Дайте ее словесную формулировку.

2. Разложите на множители многочлен:

а) $8a^3 - 27b^6$;

б) $64a^6 + 8b^{12}$.

3. Докажите, что при всех натуральных n выражение $(2n + 3)^3 + (3n + 2)^3$ кратно 5.

Вариант 2

1. Напишите формулу разности кубов. Дайте ее словесную формулировку.

2. Разложите на множители многочлен:

а) $27a^3 - 64b^6$;

б) $8a^6 + 125b^{12}$.

3. Докажите, что при всех натуральных n выражение $(3n + 4)^3 + (2n + 1)^3$ кратно 5.

III. Изучение нового материала

Рассмотрим еще одну операцию: **деление многочлена на одночлен.** При этом частным может быть или многочлен, или алгебраическая дробь (аналогично делению одночленов). **Чтобы разделить многочлен на одночлен, надо каждый член многочлена разделить на этот одночлен и полученные результаты сложить.**

Пример 1

а) Разделим многочлен $6a^2b - 3ab^2$ на одночлен $2ab$. Получаем: $\frac{6a^2b - 3ab^2}{2ab} = \frac{6a^2b}{2ab} - \frac{3ab^2}{2ab} = 3a - 1{,}5b$ – многочлен.

б) Разделим многочлен $6a^2b - 3b^2$ на одночлен $2ab$. Получаем: $\frac{6a^2b - 3b^2}{2ab} = \frac{6a^2b}{2ab} - \frac{3b^2}{2ab} = 3a - \frac{3b}{2a}$ – алгебраическая дробь.

Если каждый член многочлена имеет делитель, равный одночлену, то в многочлене можно выделить такой делитель.

Пример 2

Разделим многочлен $6a^2b - 3ab^2$ на одночлен $2ab$. Получаем: $\frac{6a^2b - 3ab^2}{2ab} = \frac{2ab \cdot 3a - 2ab \cdot 1{,}5b}{2ab} = \frac{2ab(3a - 1{,}5b)}{2ab} = 3a - 1{,}5b.$

Разумеется можно (и нужно) сочетать оба способа деления многочлена на одночлен.

IV. Задание на уроке

№ 29.3 (а, б); 29.6 (а); 29.7 (б); 29.9 (а, б); 29.11 (в); 29.13 (а); 29.14 (в, г); 29.16 (а, б).

V. Задание на дом

№ 29.3 (в, г); 29.6 (б); 29.7 (г); 29.9 (в, г); 29.11 (г); 29.13 (б); 29.14 (а, б); 29.16 (в, г).

VI. Подведение итогов урока

Уроки 71–72. Контрольная работа № 6 по теме «Многочлены. Арифметические операции над многочленами»

Цель: проверка знаний учащихся с использованием разноуровневых вариантов.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Характеристика контрольной работы

Контрольная работа составлена в шести вариантах различной сложности (варианты 1, 2 – самые простые, варианты 3, 4 – средней сложности, варианты 5, 6 – самые сложные). При этом сложность вариантов нарастает не очень резко. Каждый вариант содержит шесть задач примерно одинаковой сложности (могут быть несколько сложнее две последние задачи).

При проверке вариантов 1, 2 оценка «5» ставится за правильное решение пяти задач, оценка «4» – четырех задач и оценка «3» – трех задач. Одна задача является резервной (или запасной) и дает некоторую возможность выбора учащимся. При таких же критериях оценки в случае вариантов 3, 4 дается дополнительно 0,5 балла и в случае вариантов 5, 6 – дополнительно 1,0 балл (учитывая более высокую сложность этих вариантов). Поэтому в случае вариантов 5, 6 оценку «5» можно получить за правильное решение четырех задач.

Выбор вариантов может быть сделан учителем или учащимся (при этом число экземпляров вариантов должно быть достаточным). Разумеется, учащиеся должны знать о различной сложности вариантов и критериях оценки контрольной работы.

III. Варианты работы

Вариант 1

1. Запишите в виде многочлена стандартного вида:
   а) $(2a - 3b)^2$;
   б) $(a + 2b)(a^2 - 2ab + 4b^2)$.
2. Разложите многочлен на множители:
   а) $4a^2 - 9b^2$;
   б) $-4x^2 + 8x - 4$.

3. Решите уравнение $(2x-1)^2=(2x+3)(2x-3)$.
4. Докажите неравенство $4x^2+y^2>4xy-5$.
5. Сократите дробь $\dfrac{24^2-11^2}{49^2-36^2}$.
6. Разложите на множители многочлен $x^{2n+1}+2x^{n+1}+x$.

Вариант 2

1. Запишите в виде многочлена стандартного вида:
   а) $(3a+4b)^2$;
   б) $(2a-b)(4a^2+2ab+b^2)$.
2. Разложите многочлен на множители:
   а) $9a^2-16b^2$;
   б) $-5x^2+10x-5$.
3. Решите уравнение $(2x-3)^2=(2x-5)(2x+5)-2$.
4. Докажите неравенство $9x^2+y^2>6xy-3$.
5. Сократите дробь $\dfrac{34^2-21^2}{69^2-56^2}$.
6. Разложите на множители многочлен $y^{2n+1}-2y^{n+1}+y$.

Вариант 3

1. Запишите в виде многочлена стандартного вида:
   а) $(4a^2-3b)^2$;
   б) $(2a+3b)(4a^2-6ab+9b^2)$.
2. Разложите многочлен на множители:
   а) $16b^4-25a^2$;
   б) $-4x^4+8x^2-4$.
3. Решите уравнение $(3x-2)^2=(2x+1)(2x-1)+5x^2-7$.
4. Докажите неравенство $4x^2+9y^2>12xy-0{,}1$.
5. Докажите, что число 15^4-189^2 кратно 4 и 9.
6. Разложите на множители многочлен $x^{2n}+6x^ny^k+9y^{2k}$.

Вариант 4

1. Запишите в виде многочлена стандартного вида:
   а) $(5a-4b^2)^2$;
   б) $(3a-2b)(9a^2+6ab+4b^2)$.
2. Разложите многочлен на множители:
   а) $25a^2-9b^4$;
   б) $-3x^4+6x^2-3$.
3. Решите уравнение $(5x-3)^2=(4x+3)(4x-3)+9x^2+3$.
4. Докажите неравенство $25x^2+16y^2>40xy-0{,}2$.
5. Докажите, что число 16^4-232^2 кратно 4 и 6.
6. Разложите на множители многочлен $4x^{2n}-4x^ny^k+y^{2k}$.

Вариант 5

1. Запишите в виде многочлена стандартного вида:
$(x+2)^3+(2x-1)(4x^2+2x+1)$.

2. Разложите на множители многочлен $4a^2+4ab^2+b^4-a^4$.

3. Решите уравнение $(x+1)^3=x^2(x+1)$.

4. Найдите наименьшее значение выражения $a^2+6ab+10b^2-2b+3$. При каких значениях a и b оно достигается?

5. Вычислите: $\dfrac{53^2-31^2-43^2+41^2}{73^2-2\cdot 73\cdot 63+63^2}$.

6. Разложите на множители многочлен $x^{2n+5}-6x^{n+5}+9x^5$.

Вариант 6

1. Запишите в виде многочлена стандартного вида:
$(x-1)^3+(2x+3)(4x^2-6x+9)$.

2. Разложите на множители многочлен $9a^2+6ab^2+b^4-a^4$.

3. Решите уравнение $(x-1)^3=x^2(x-1)$.

4. Найдите наименьшее значение выражения $a^2-8ab+17b^2+2b+4$. При каких значениях a и b оно достигается?

5. Вычислите: $\dfrac{67^2-35^2-57^2+45^2}{84^2-2\cdot 84\cdot 74+74^2}$.

6. Разложите на множители многочлен $y^{2n+3}-4y^{n+3}+4y^3$.

Урок 73. Итоги контрольной работы

Цели: сообщить результаты работы, рассмотреть наиболее типичные ошибки, разобрать трудные задачи.

Ход урока

I. Сообщение темы и целей урока

II. Итоги контрольной работы

1. Распределение работ по вариантам и результаты решения.

Данные о результатах работы удобно заносить в таблицу (для каждой пары вариантов).

№ задачи / Итоги	1	2	3	…	6
+	5				
±	1				
—	1				
Ø	1				

Обозначения:

\+ – число решивших задачу правильно или почти правильно;

± – число решивших задачу со значительными погрешностями;

— – число не решивших задачу;

Ø – число не решавших задачу.

2. Типичные ошибки, возникшие при решении задач.

3. Наиболее трудные задачи и их разбор (учителем или школьниками, сделавшими эту задачу).

4. Разбор всей контрольной работы (вывесить на стенде ответы к заданиям вариантов и разбор наиболее трудных вариантов).

III. Ответы и решения

Ответы

Вариант 1

1. *Ответ*: а) $4a^2 - 12ab + 9b^2$; б) $a^3 + 8b^3$.
2. *Ответ*: а) $(2a - 3b)(2a + 3b)$; б) $-4(x - 1)^2$.
3. *Ответ*: $x = 2{,}5$.
4. *Ответ*: доказано.
5. *Ответ*: $\dfrac{7}{17}$.
6. *Ответ*: $x(x^n + 1)^2$.

Вариант 2

1. *Ответ*: а) $9a^2 + 24ab + 16b^2$; б) $8a^3 - b^3$.
2. *Ответ*: а) $(3a - 4b)(3a + 4b)$; б) $-5(x - 1)^2$.
3. *Ответ*: $x = 3$.
4. *Ответ*: доказано.
5. *Ответ*: $\dfrac{11}{25}$.
6. *Ответ*: $y(y^n - 1)^2$.

Вариант 3

1. *Ответ*: а) $16a^4 - 24a^2b + 9b^2$; б) $8a^3 + 27b^3$.
2. *Ответ*: а) $(4b^2 - 5a)(4b^2 + 5a)$; б) $-4(x - 1)^2(x + 1)^2$.
3. *Ответ*: $x = 1$.
4. *Ответ*: доказано.
5. *Ответ*: доказано.
6. *Ответ*: $(x^n + 3y^k)^2$.

Вариант 4

1. *Ответ*: а) $25a^2 - 40ab^2 + 16b^4$; б) $27a^3 - 8b^3$.
2. *Ответ*: а) $(5a - 3b^2)(5a + 3b^2)$; б) $-3(x - 1)^2(x + 1)^2$.
3. *Ответ*: $x = 0{,}5$.
4. *Ответ*: доказано.
5. *Ответ*: доказано.
6. *Ответ*: $(2x^n - y^k)^2$.

Решения

Вариант 5

1. Используем формулы для куба суммы и разности кубов. Получим: $(x+2)^3 + (2x-1)(4x^2+2x+1) = x^3 + 3x^2 \cdot 2 + 3x \cdot 2^2 + 2^3 + (2x)^3 - 1^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8 + 8x^3 - 1 = 9x^3 + 6x^2 + 12x + 7$.

Ответ: $9x^3 + 6x^2 + 12x + 7$.

2. Учтем формулы для квадрата суммы и разности квадратов: $4a^2 + 4ab^2 + b^4 - a^4 = (4a^2 + 4ab^2 + b^4) - a^4 = (2a + b^2)^2 - (a^2)^2 = (2a + b^2 - a^2)(2a + b^2 + a^2)$.

Ответ: $(2a + b^2 - a^2)(2a + b^2 + a^2)$.

3. Перенесем члены уравнения в левую часть и разложим ее на множители: $(x+1)^3 = x^2(x+1)$, или $(x+1)^3 - x^2(x+1) = 0$, или $(x+1)((x+1)^2 - x^2) = 0$, или $(x+1)(x+1-x)(x+1+x) = 0$, или $(x+1)(2x+1) = 0$. Произведение множителей равно нулю, если один из них равен нулю. Получаем два линейных уравнения: $x + 1 = 0$ (корень $x = -1$) и $2x + 1 = 0$ (корень $x = -\frac{1}{2}$).

Ответ: $x = -1$ и $x = -0,5$.

4. Сгруппируем члены выражения и используем формулы квадрата суммы и разности. Получаем: $a^2 + 6ab + 10b^2 - 2b + 3 = (a^2 + 6ab + 9b^2) + (b^2 - 2b + 1) + 2 = (a + 3b)^2 + (b - 1)^2 + 2$. Так как квадрат любого выражения неотрицателен, то наименьшее значение данного выражения равно 2. Оно достигается при условии $a + 3b = 0$ и $b - 1 = 0$, т. е. $b = 1$ и $a = -3b = -3$.

Ответ: 2 при $a = -3$ и $b = 1$.

5. Сгруппируем члены в числителе и используем формулы разности квадратов. В знаменателе учтем формулу квадрата разности. Получаем: $\frac{53^2 - 31^2 - 43^2 + 41^2}{73^2 - 2 \cdot 73 \cdot 63 + 63^2} = \frac{(53^2 - 43^2) + (41^2 - 31^2)}{(73-63)^2} =$

$$= \frac{96 \cdot 10 + 72 \cdot 10}{10^2} = \frac{10(96 + 72)}{10^2} = \frac{168}{10} = 16,8.$$

Ответ: 16,8.

6. Вынесем за скобки x^5 и учтем формулу квадрата разности. Имеем: $x^{2n+5} - 6x^{n+5} + 9x^5 = x^5(x^{2n} - 6x^n + 9) = x^5(x^n - 3)^2$.

Ответ: $x^5(x^n - 3)^2$.

Вариант 6

1. Используем формулы для куба суммы и разности кубов. Получим: $(x-1)^3 + (2x+3)(4x^2 - 6x + 9) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + (2x)^3 + 3^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 8x^3 + 27 = 9x^3 - 3x^2 + 3x + 26$.

Ответ: $9x^3 - 3x^2 + 3x + 26$.

2. Учтем формулы для квадрата суммы и разности квадратов:
$9a^2 + 6ab^2 + b^4 - a^4 = (9a^2 + 6ab^2 + b^4) - a^4 = (3a + b^2)^2 - (a^2)^2 =$
$= (3a + b^2 - a^2)(3a + b^2 + a^2)$.

Ответ: $(3a + b^2 - a^2)(3a + b^2 + a^2)$.

3. Перенесем члены уравнения в левую часть и разложим ее на множители: $(x - 1)^3 = x^2(x - 1)$, или $(x - 1)^3 - x^2(x - 1) = 0$, или $(x - 1)((x - 1)^2 - x^2) = 0$, или $(x - 1)(x - 1 - x)(x - 1 + x) = 0$, или $(x - 1)(2x - 1) = 0$. Произведение множителей равно нулю, если один из них равен нулю. Получаем два линейных уравнения: $x - 1 = 0$ (корень $x = 1$) и $2x - 1 = 0$ (корень $x = \frac{1}{2}$).

Ответ: $x = 1$ и $x = 0{,}5$.

4. Сгруппируем члены выражения и используем формулы квадрата суммы и разности. Получаем: $a^2 - 8ab + 17b^2 + 2b + 4 = (a^2 - 8ab + 16b^2) + (b^2 + 2b + 1) + 3 = (a - 4b)^2 + (b + 1)^2 + 3$. Так как квадрат любого выражения неотрицателен, то наименьшее значение данного выражения равно 3. Оно достигается при условии $a - 4b = 0$ и $b + 1 = 0$, т. е. $b = -1$ и $a = 4b = -4$.

Ответ: 3 при $a = -4$ и $b = -1$.

5. Сгруппируем члены в числителе и используем формулы разности квадратов. В знаменателе учтем формулу квадрата разности. Получаем: $\frac{67^2 - 35^2 - 57^2 + 45^2}{84^2 - 2 \cdot 84 \cdot 74 + 74^2} = \frac{(67^2 - 57^2) + (45^2 - 35^2)}{(84 - 74)^2} =$

$$= \frac{124 \cdot 10 + 80 \cdot 10}{10^2} = \frac{10(124 + 80)}{10^2} = \frac{204}{10} = 20{,}4.$$

Ответ: 20,4.

6. Вынесем за скобки y^3 и учтем формулу квадрата разности. Имеем: $y^{2n+3} - 4y^{n+3} + 4y^3 = y^3(y^{2n} - 4y^n + 4) = y^3(y^n - 2)^2$.

Ответ: $y^3(y^n - 2)^2$.

Уроки 74–75. Зачет по теме «Многочлены. Арифметические операции над многочленами»

Цель: проверка знаний учащихся по вариантам одинаковой сложности.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Характеристика зачетной работы

Работа составлена в двух равноценных вариантах. По сравнению с контрольной работой увеличено количество заданий. Соответственно у учащихся возрастает возможность выбора задач. Все задания разбиты на три блока А, В и С. Самые простые задачи находятся в блоке А, более сложные – в блоке В, еще сложнее – в блоке С. Каждая задача из блока А оценивается в 1 балл, из блока В – в 2 балла, из блока С – в 3 балла. Поэтому за правильное решение всех задач блока А можно получить 7 баллов, блока В – 8 баллов и блока С – 9 баллов (всего 24 балла). Оценка «3» ставится за 6 баллов, оценка «4» – за 10 баллов, оценка «5» – за 14 баллов.

Так как эта работа является зачетной, то в нее не включены принципиально новые задачи. Поэтому разбору заданий работы занятия можно и не посвящать (решения задач могут быть вывешены на стенде). Для стендового размещения разбор вариантов приводится.

III. Варианты зачетной работы

Вариант 1

А

1. Запишите многочлен в стандартном виде и определите его степень: $3x(-2x^2) + x^4 + 5x^2(2x - 1) + x^2 + 2$.

2. Преобразуйте выражение в многочлен стандартного вида:

а) $(2a - 3)^2$;

б) $(3a - 4b)(3a + 4b)$;

в) $(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$.

3. Упростите выражение $2(a - b)^2 - (a - 2b)(a + 2b)$.

4. Докажите, что число $127^2 - 23^2$ кратно 25.

5. Сравните числа $(138 + 517)^2$ и $138^2 + 517^2$.

6. Докажите, что при всех значениях x значение выражения $7 - 4x + 4x^2$ больше 5.

7. Решите уравнение $(2x + 1)^2 - (2x + 3)(2x - 3) = 18$.

В

8. Найдите значение выражения $(5a - 2)(5a + 2) - (5a + 1)^2 + 10a$.

9. Докажите, что число $187^3 - 5^9$ делится на 62.

10. Найдите наименьшее значение выражения $2a^2 - 4ab + 4b^2 - 2a + 4$. При каких значениях a и b оно достигается?

11. Решите уравнение $(3x - 5)^2 = (2x + 1)^2$.

С

12. Сравните числа $189 \cdot 191 \cdot 193 \cdot 195$ и 192^4.

13. При каких значениях a равенство $(x + 7)^2 - 9(x + 5) + 2 = (x + 2)(x + a)$ выполняется при всех значениях x?

14. Решите уравнение $(2x - 3a)^2 = (x + a)^2$.

Вариант 2

А

1. Запишите многочлен в стандартном виде и определите его степень: $5x(-3x^3) + 7x^4 - 3x^2(2 - x) + 2x^2 - 3$.

2. Преобразуйте выражение в многочлен стандартного вида:

а) $(3a - 2)^2$;

б) $(2a - 5b)(2a + 5b)$;

в) $(x + 3)(x^2 - 3x + 9)$.

3. Упростите выражение $3(a + b)^2 - (2a + b)(2a - b)$.

4. Докажите, что число $158^2 - 42^2$ кратно 50.

5. Сравните числа $(341 + 113)^2$ и $341^2 + 113^2$.

6. Докажите, что при всех значениях x значение выражения $5 - 6x + 9x^2$ больше 3.

7. Решите уравнение $(3x - 1)^2 - (3x + 2)(3x - 2) = 11$.

В

8. Найдите значение выражения $(3a + 2)^2 + (7 + 3a)(7 - 3a) - 12a$.

9. Докажите, что число $117^3 - 4^9$ делится на 53.

10. Найдите наименьшее значение выражения $10a^2 - 6ab + b^2 - 4a + 6$. При каких значениях a и b оно достигается?

11. Решите уравнение $(4x - 3)^2 = (3x + 1)^2$.

С

12. Сравните числа $273 \cdot 275 \cdot 277 \cdot 279$ и 276^4.

13. При каких значениях a равенство $(x + 5)^2 - 4(x + 7) + 11 = (x + 2)(x + a)$ выполняется при всех значениях x?

14. Решите уравнение $(3x - 4a)^2 = (x + 2a)^2$.

IV. Разбор заданий

Вариант 1

1. Выполним действия и приведем подобные члены. Получим:

$3x(-2x^2) + x^4 + 5x^2(2x - 1) + x^2 + 2 = -6x^3 + x^4 + 10x^3 - 5x^2 + x^2 + 2 = x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 2$ – многочлен четвертой степени.

Ответ: $x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 2$, степень 4.

2. Используем формулы сокращенного умножения:

а) квадрата разности: $(2a - 3)^2 = 4a^2 - 12a + 9$;

б) разности квадратов: $(3a - 4b)(3a + 4b) = 9a^2 - 16b^2$;

в) разности кубов: $(x - 2)(x^2 + 2x + 4) = x^3 - 8$.

Ответ: а) $4a^2 - 12a + 9$; б) $9a^2 - 16b^2$; в) $x^3 - 8$.

3. Применим формулы квадрата разности и разности квадратов. Получаем: $2(a - b)^2 - (a - 2b)(a + 2b) = 2(a^2 - 2ab + b^2) - (a^2 - 4b^2) = 2a^2 - 4ab + 2b^2 - a^2 + 4b^2 = a^2 - 4ab + 6b^2$.

Ответ: $a^2 - 4ab + 6b^2$.

4. Используем формулу разности квадратов: $127^2 - 23^2 = (127 - 23)(127 + 23) = 104 \cdot 150$. Так как число 150 кратно 25, то и данное число кратно 25.

Ответ: доказано.

5. Применим формулу квадрата суммы: $(138 + 517)^2 = 138^2 + 2 \cdot 138 \cdot 517 + 517^2 > 138^2 + 517^2$, т. е. $(138 + 517)^2 > 138^2 + 517^2$.

Ответ: $(138 + 517)^2 > 138^2 + 517^2$.

6. В данном выражении выделим квадрат разности:

$7 - 4x + 4x^2 = 6 + (1 - 4x + 4x^2) = 6 + (1 - 2x)^2$. Так как при всех x выражение $(1 - 2x)^2 \geq 0$, то данное выражение ≥ 6, и тем более больше 5.

Ответ: доказано.

7. Используем формулу квадрата суммы и разности квадратов. Имеем: $(2x + 1)^2 - (2x + 3)(2x - 3) = 18$, или $(4x^2 + 4x + 1) - (4x^2 - 9) = 18$, или $4x + 10 = 18$, откуда $x = 2$.

Ответ: $x = 2$.

8. Применим формулы разности квадратов и квадрата разности и упростим выражение: $(5a - 2)(5a + 2) - (5a + 1)^2 + 10a = (25a^2 - 4) - (25a^2 + 10a + 1) + 10a = 25a^2 - 4 - 25a^2 - 10a - 1 + 10a = -5$.

Ответ: -5.

9. Используем формулу разности кубов:

$187^3 - 5^9 = 187^3 - (5^3)^3 = 187^3 - 125^3 = (187 - 125)(187^2 + 187 \cdot 125 + 125^2) = 62 \cdot (187^2 + 187 \cdot 125 + 125^2)$. Очевидно, такое число делится на 62.

Ответ: доказано.

10. В данном выражении выделим два квадрата разности:

$2a^2 - 4ab + 4b^2 - 2a + 4 = (a^2 - 4ab + 4b^2) + (a^2 - 2a + 1) + 3 = (a - 2b)^2 + (a - 1)^2 + 3$. Выражение состоит из квадратов двух величин (они всегда неотрицательны) и числа 3. Поэтому наименьшее значение данного выражения равно 3. Оно достигается при условии $a - 2b = 0$ и $a - 1 = 0$ (т. е. при $a = 1$ и $b = \dfrac{1}{2}$).

Ответ: 3 при $a = 1$ и $b = \dfrac{1}{2}$.

11. Перенесем члены уравнения в левую часть и используем формулу разности квадратов. Получаем: $(3x - 5)^2 - (2x + 1)^2 = 0$, или $(3x - 5 - (2x + 1))(3x - 5 + 2x + 1) = 0$, или $(x - 6)(5x - 4) = 0$. Так как произведение множителей равно нулю, то один из них равен нулю. Получаем уравнения: $x - 6 = 0$ (корень $x = 6$) и $5x - 4 = 0$ (корень $x = 0{,}8$).

Ответ: $x = 6$ и $x = 0{,}8$.

12. Для сравнения чисел преобразуем первое число. Каждый множитель в нем запишем, используя число 192. Получаем:

$189 \cdot 191 \cdot 193 \cdot 195 = (192-3)(192-1)(192+1)(192+3)$. Изменим порядок умножения чисел и используем формулу разности квадратов: $(192-3)(192+3)(192-1)(192+1) = (192^2-3^2)(192^2-1^2)$. В этом произведении каждый множитель меньше 192^2. Поэтому произведение меньше $192^2 \cdot 192^2 = 192^4$. Итак, первое число меньше второго.

Ответ: первое число меньше второго.

13. Используя формулу квадрата суммы, преобразуем данное равенство. Получаем: $(x+7)^2 - 9(x+5) + 2 = (x+2)(x+a)$ или $x^2 + 14x + 49 - 9x - 45 + 2 = x^2 + ax + 2x + 2a$. Приведем подобные члены и получим: $5x + 6 = ax + 2x + 2a$ или $3x + 6 = ax + 2a$. В левой и правой части равенства стоят многочлены первой степени. Они будут равны, если коэффициенты при x в них одинаковые и равны свободные члены. Получаем условия: $3 = a$ и $6 = 2a$, которые выполняются только при $a = 3$. Итак, при $a = 3$ данное равенство выполняется при всех x.

Ответ: $a = 3$.

14. Перенесем члены уравнения в левую часть и используем формулу разности квадратов. Получаем: $(2x-3a)^2 - (x+a)^2 = 0$, или $(2x - 3a - (x+a))(2x - 3a + x + a) = 0$, или $(x-4a)(3x-2a) = 0$. Так как произведение множителей равно нулю, то один из них равен нулю. Получаем уравнения: $x - 4a = 0$ (корень $x = 4a$) и $3x - 2a = 0$ (корень $x = \frac{2a}{3}$).

Ответ: $x = 4a$ и $x = \frac{2a}{3}$.

Вариант 2

1. Выполним действия и приведем подобные члены. Получим:
$5x \cdot (-3x^3) + 7x^4 - 3x^2(2-x) + 2x^2 - 3 = -15x^4 + 7x^4 - 6x^2 + 3x^3 + 2x^2 - 3 = -8x^4 + 3x^3 - 4x^2 - 3$ – многочлен четвертой степени.

Ответ: $-8x^4 + 3x^3 - 4x^2 - 3$, степень 4.

2. Используем формулы сокращенного умножения:

а) квадрата разности: $(3a-2)^2 = 9a^2 - 12a + 4$;

б) разности квадратов: $(2a-5b)(2a+5b) = 4a^2 - 25b^2$;

в) разности кубов: $(x+3)(x^2-3x+9) = x^3 + 27$.

Ответ: а) $9a^2 - 12a + 4$; б) $4a^2 - 25b^2$; в) $x^3 + 27$.

3. Применим формулы квадрата разности и разности квадратов. Получаем: $3(a+b)^2 - (2a+b)(2a-b) = 3(a^2 + 2ab + b^2) - (4a^2 - b^2) = 3a^2 + 6ab + 3b^2 - 4a^2 + b^2 = -a^2 + 6ab + 4b^2$.

Ответ: $-a^2 + 6ab + 4b^2$.

4. Используем формулу разности квадратов: $158^2 - 42^2 = (158-42)(158+42) = 116 \cdot 200$. Так как число 200 кратно 50, то и данное число кратно 50.

Ответ: доказано.

5. Применим формулу квадрата суммы: $(341 + 113)^2 = 341^2 + 2 \cdot 341 \cdot 113 + 113^2 > 341^2 + 113^2$.

Ответ: $(341 + 113)^2 > 341^2 + 113^2$.

6. В данном выражении выделим квадрат разности:

$5 - 6x + 9x^2 = 4 + (1 - 6x + 9x^2) = 4 + (1 - 3x)^2$. Так как при всех x выражение $(1 - 3x)^2 \geq 0$, то данное выражение ≥ 4, и тем более больше 3.

Ответ: доказано.

7. Используем формулу квадрата разности и разности квадратов. Имеем: $(3x - 1)^2 - (3x + 2)(3x - 2) = 11$, или $(9x^2 - 6x + 1) - (9x^2 - 4) = 11$, или $-6x + 5 = 11$, откуда $x = -1$.

Ответ: $x = 1$.

8. Применим формулы квадрата суммы и разности квадратов и упростим выражение: $(3a + 2)^2 + (7 + 3a)(7 - 3a) - 12a = (9a^2 + 12a + 4) - (49 - 9a^2) - 12a = 9a^2 + 12a + 4 + 49 - 9a^2 - 12a = 53$.

Ответ: 53.

9. Используем формулу разности кубов: $117^3 - 4^9 = 117^3 - (4^3)^3 = 117^3 - 64^3 = (117 - 64)(117^2 + 117 \cdot 64 + 64^2) = 53 \cdot (117^2 + 117 \cdot 64 + 64^2)$. Очевидно, такое число делится на 53.

Ответ: доказано.

10. В данном выражении выделим два квадрата разности:

$10a^2 - 6ab + b^2 - 4a + 6 = (9a^2 - 6ab + b^2) + (a^2 - 4a + 4) + 2 = (3a - b)^2 + (a - 2)^2 + 2$. Выражение состоит из квадратов двух величин (они всегда неотрицательны) и числа 2. Поэтому наименьшее значение данного выражения равно 2. Оно достигается при условии $3a - b = 0$ и $a - 2 = 0$ (т. е. при $a = 2$ и $b = 6$).

Ответ: 2 при $a = 2$ и $b = 6$.

11. Перенесем члены уравнения в левую часть и используем формулу разности квадратов. Получаем: $(4x - 3)^2 - (3x + 1)^2 = 0$, или $(4x - 3 - (3x + 1))(4x - 3 + 3x + 1) = 0$, или $(x - 4)(7x - 2) = 0$. Так как произведение множителей равно нулю, то один из них равен нулю. Получаем уравнения: $x - 4 = 0$ (корень $x = 4$) и $7x - 2 = 0$ (корень $x = \frac{2}{7}$).

Ответ: $x = 4$ и $x = \frac{2}{7}$.

12. Для сравнения чисел преобразуем первое число. Каждый множитель в нем запишем, используя число 276. Получаем: $273 \cdot 275 \cdot 277 \cdot 279 = (276 - 3)(276 - 1)(276 + 1)(276 + 3)$. Изменим порядок умножения чисел и используем формулу разности квадратов: $(276 - 3)(276 + 3)(276 - 1)(276 + 1) = (276^2 - 3^2)(276^2 - 1^2)$.

В этом произведении каждый множитель меньше 276^2. Поэтому произведение меньше $276^2 \cdot 276^2 = 276^4$. Итак, первое число меньше второго.

Ответ: первое число меньше второго.

13. Используя формулу квадрата суммы, преобразуем данное равенство. Получаем: $(x + 5)^2 - 4(x + 7) + 11 = (x + 2)(x + a)$ или $x^2 + 10x + 25 - 4x - 28 + 11 = x^2 + ax + 2x + 2a$. Приведем подобные члены и получим: $6x + 8 = ax + 2x + 2a$ или $4x + 8 = ax + 2a$. В левой и правой части равенства стоят многочлены первой степени. Они будут равны, если коэффициенты при x в них одинаковые и равны свободные члены. Получаем условия: $4 = a$ и $8 = 2a$, которые выполняются только при $a = 4$. Итак, при $a = 4$ данное равенство выполняется при всех x.

Ответ: $a = 4$.

14. Перенесем члены уравнения в левую часть и используем формулу разности квадратов. Получаем: $(3x - 4a)^2 - (x + 2a)^2 = 0$, или $(3x - 4a - (x + 2a))(3x - 4a + x + 2a) = 0$, или $(2x - 6a)(4x - 2a) = 0$. Так как произведение множителей равно нулю, то один из них равен нулю. Получаем уравнения $2x - 6a = 0$ (корень $x = 3a$) и $4x - 2a = 0$ (корень $x = \frac{a}{2}$).

Ответ: $x = 3a$ и $x = \frac{a}{2}$.

Глава 7. Разложение многочленов на множители

§ 30. Что такое разложение многочленов на множители и зачем оно нужно

Урок 76. Применение разложения многочленов на множители

Цель: обсудить использование разложения многочленов на множители.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Изучение нового материала

Запись многочлена в виде произведения нескольких других многочленов (при этом некоторые могут быть и одночленами) **называют разложением многочлена на множители.**

Пример 1

Легко проверить, что выполнено равенство:

а) $3x^2(2x + 1) = 6x^3 + 3x^2$. Поэтому можно считать, что произведение одночлена $3x^2$ и многочлена $2x + 1$ является разложением на множители многочлена $6x^3 + 3x^2$.

б) $(2x + 1)(x - 3) = 2x^2 - 5x - 3$. Поэтому можно считать, что произведение многочленов $2x + 1$ и $x - 3$ является разложением на множители многочлена $2x^2 - 5x - 3$.

в) $(2x + 1)^2 = (2x + 1)(2x + 1) = 4x^2 + 4x + 1$. Поэтому можно считать, что произведение многочленов $2x + 1$ и $2x + 1$ (т. е. $(2x + 1)^2$) является разложением на множители многочлена $4x^2 + 4x + 1$.

При этом заметим, что получать из левой части правую после главы 6 мы уже умеем. Обратная процедура – получение из правой части левой – будет изучаться в этой главе. Для этого существуют определенные **способы**, которые поочередно будут рассмотрены.

В главе 6 мы уже видели, что разложение многочлена на множители позволяет эффективно решать многие задачи. Обсудим еще несколько примеров.

Пример 2

Докажем, что число $162^3 - 5^9$ делится без остатка на 37.

Используем формулу разности кубов и запишем данное число в виде: $162^3 - 5^9 = 162^3 - (5^3)^3 = 162^3 - 125^3 = (162 - 125)\cdot(162^2 +$

$+ 162 \cdot 125 + 125^2) = 37 \cdot (162^2 + 162 \cdot 125 + 125^2)$. Очевидно, что такое число кратно 37.

Пример 3

Сократим дробь $\dfrac{676^2 - 324^2}{532^2 - 468^2}$.

Разложим числитель и знаменатель дроби на множители, используя формулу разности квадратов. Получаем: $\dfrac{676^2 - 324^2}{532^2 - 468^2} =$

$$= \frac{(676-324)\cdot(676+324)}{(532-468)\cdot(532+468)} = \frac{352\cdot 1000}{64\cdot 1000} = \frac{352}{64} = \frac{11}{2} = 5{,}5.$$

Пример 4

Решим уравнение $x^2 + 5x + 4 = 0$.

Разложим левую часть уравнения на множители. Имеем: $x^2 + 5x + 4 = 0$, или $x^2 + x + 4x + 4 = 0$, или $(x^2 + x) + (4x + 4) = 0$, или $x(x + 1) + 4(x + 1) = 0$, или $(x + 1)(x + 4) = 0$. Так как произведение множителей равно нулю, то один из них равен нулю. Получаем два линейных уравнения: $x + 1 = 0$ (корень $x = -1$) и $x + 4 = 0$ (корень $x = -4$). Итак, данное уравнение имеет два корня: $x = -1$ и $x = -4$.

В последующих разделах будут рассмотрены способы разложения многочленов на множители:

– вынесение общего множителя за скобки;
– группировка членов;
– использование формул сокращенного умножения;
– комбинация этих способов.

III. Задание на уроке

№ 30.2 (б); 30.3 (г); 30. 6 (а, б); 30.8 (г); 30.10 (а, б); 30.11 (в, г); 30.13 (а, б); 30.15 (а); 30.17 (в, г); 30.18 (а, б).

IV. Задание на дом

№ 30.2 (г); 30.3 (б); 30.6 (в, г); 30.8 (б); 30.10 (в, г); 30.11 (а, б); 30.3 (в, г); 30.15 (г); 30.17 (а, б); 30.18 (в, г).

V. Подведение итогов урока

§ 31. Вынесение общего множителя за скобки

Уроки 77–78. Способ вынесения общего множителя'

Цель: начать изучение способов разложения многочленов на множители.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Изучение нового материала

Разложение многочлена на множители основано на **распределительном свойстве** $ab + ac = a(b + c)$. При этом общий множитель a в членах ab и ac многочлена выносят за скобки. Поэтому такой способ разложения многочлена называют **вынесением общего множителя за скобки.**

Пример 1

Разложим на множители многочлен $A = 9a^3b^2 - 21a^2b^3$. Легко заметить, что члены $9a^3b^2$ и $21a^2b^3$ многочлена A имеют наибольший общий множитель $3a^2b^2$. Поэтому их можно записать в виде $9a^3b^2 = 3a^2b^2 \cdot 3a$ и $21a^2b^3 = 3a^2b^2 \cdot 7b$. Тогда данный многочлен имеет вид: $A = 3a^2b^2 \cdot 3a - 3a^2b^2 \cdot 7b$. Используя распределительное свойство, вынесем общий множитель $3a^2b^2$ за скобки и получим $A = 3a^2b^2 \cdot (3a - 7b)$. Таким образом, данный многочлен A разложен на произведение одночлена $3a^2b^2$ и многочлена $3a - 7b$.

Заметим, что **легко проверить правильность разложения на множители.** Для этого надо **выполнить обратное действие** – умножить одночлен $3a^2b^2$ и многочлен $3a - 7b$. Получаем: $3a^2b^2(3a - 7b) = 3a^2b^2 \cdot 3a - 3a^2b^2 \cdot 7b = 9a^3b^2 - 21a^2b^3 = A$. Так как в результате умножения вновь получен многочлен A, то его разложение на множители выполнено правильно.

Пример 2

Разложим на множители многочлен $A = 21a^3b^2 + 28a^2b^3 - 14ab$.

Легко заметить, что каждый член многочлена A имеет множителем одночлен $7ab$. Поэтому многочлен A можно записать в виде $A = 7ab \cdot 3a^2b + 7ab \cdot 4ab^2 - 7ab \cdot 2$. Теперь этот общий множитель $7ab$ можно вынести за скобки: $A = 7ab(3a^2b + 4ab^2 - 2)$. Таким образом, многочлен A разложен на произведение одночлена $7ab$ и многочлена $3a^2b + 4ab^2 - 2$.

Правильность разложения на множители легко проверить. Если умножить множители многочлена, то получится данный многочлен:

$7ab(3a^2b + 4ab^2 - 2) = 7ab \cdot 3a^2b + 7ab \cdot 4ab^2 + 7ab \cdot (-2) = 21a^3b^2 + 28a^2b^3 - 14ab.$

Чтобы вынести за **скобки общий множитель** нескольких одночленов, надо:

1) найти **наибольший общий делитель коэффициентов** всех одночленов;

2) найти **переменные**, которые входят в каждый член многочлена, и выбрать для каждой из них **наименьший показатель степени**;

3) **произведение коэффициента** (найденного в п. 1) **и переменных** (найденных в п. 2) **является общим множителем**, который выносится за скобки;

4) после вынесения общего множителя за скобки от каждого члена **остается в скобках частное от деления этого члена на общий множитель.**

Именно этот алгоритм использовался в примерах 1, 2. Разумеется, за скобки можно выносить не только одночлен, но и многочлен.

Пример 3

Разложим на множители многочлен $A = 2a^2b \cdot (2a + 3b) + 3c \cdot (2a + 3b)$.

Вынесем общий множитель $(2a + 3b)$ за скобки и получаем: $A = (2a + 3b)(2a^2b + 3c)$. Итак, многочлен A разложен на произведение двух многочленов: $(2a + 3b)$ и $(2a^2b + 3c)$.

Правильность разложения легко проверить умножением сомножителей: $(2a + 3b)(2a^2b + 3c) = (2a + 3b) \cdot 2a^2b + (2a + 3b) \cdot 3c$, т. е. получим данный многочлен.

Пример 4

Разложим на множители многочлен $A = 7a^2(a - 3b) + b(3b - a)$.

Слагаемые в выражении A имеют множители $a - 3b$ и $3b - a$, которые отличаются друг от друга только знаком. Поэтому в многочлене $3b - a$ выносим число -1 за скобки. Получаем: $A = 7a^2(a - 3b) + b \cdot (-1)(a - 3b) = 7a^2(a - 3b) - b(a - 3b) = (a - 3b)(7a^2 - b)$. Таким образом, данный многочлен A разложен на произведение многочленов $a - 3b$ и $7a^2 - b$.

Заметим, что преобразование $b(3b - a) = -b(a - 3b)$ можно объяснить и иначе: **если изменить знак у второго множителя и перед произведением, то значение выражения не изменится.**

Способ разложения на множители часто используется при решении уравнений и в задачах на делимость чисел.

Пример 5

Решим уравнение $3x^2 - 2x = 0$.

Разложим левую часть уравнения на множители. Для этого выносим общий множитель x за скобки. Получаем: $x(3x - 2) = 0$. Произведение множителей равно нулю, если хотя бы один из них равен нулю. Имеем: $x = 0$ или $3x - 2 = 0$ (корень этого линейного уравнения $x = 2/3$). Итак, данное уравнение имеет два корня: $x_1 = 0$ и $x_2 = 2/3$.

Пример 6

Докажем, что выражение $4^6 + 4^8 - 7 \cdot 4^5$ делится на 61.

Вынесем в выражении $4^6 + 4^8 - 7 \cdot 4^5$ общий множитель 4^5 за скобки и получим: $4^6 + 4^8 - 7 \cdot 4^5 = 4^5(4 + 4^3 - 7) = 4^5(4 + 64 - 7) = 4^5 \cdot 61$. Данное выражение представлено в виде произведения двух чисел, одно из которых равно 61. Поэтому данное выражение делится на 61.

III. Задание на уроках

№ 31.8 (в); 31.9 (а); 31.12 (в, г); 31.14 (а); 31.15 (в, г); 31.18 (а, г); 31.19 (б); 31.22 (а, б); 31.23 (г); 31.24 (а, б); 31.25 г); 31.26 (а, г).

IV. Контрольные вопросы

1. Какое преобразование называется разложением многочлена на множители?

2. На каком свойстве основано вынесение общего множителя за скобки?

3. Как выносится общий множитель за скобки? Поясните на примере.

V. Задание на дом

№ 31.8 (г); 31.9 (б); 31.23 (а, б); 31.14 (г); 31.15 (а, б); 31.18 (б, в); 31.19 (г); 31.22 (в, г); 31.23 (а); 31.24 (в, г); 31.25 (б); 31.26 (б, в).

VI. Подведение итогов уроков

§ 32. Способ группировки

Уроки 79–80. Группировка членов при разложении

Цель: познакомиться с другим способом разложения многочлена на множители.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1. Разложите многочлен на множители:

   а) $6x^2y - 3x^3y^3 + 9xy^2$;

   б) $2a^2(a - b) + b(b - a)$.

2. Докажите, что число $17^8 + 3 \cdot 17^7$ кратно 20.
3. Постройте график уравнения $2x^2y - xy^2 = 0$.

Вариант 2

1. Разложите многочлен на множители:

   а) $8x^3y^2 - 2x^2y + 4x^4y^2$;

   б) $3a(b - a) + 2b^2(a - b)$.

2. Докажите, что число $21^9 + 9 \cdot 21^8$ кратно 30.
3. Постройте график уравнения $x^2y + 2xy^2 = 0$.

III. Изучение нового материала

В ряде случаев все члены многочлена не имеют общего множителя, однако определенные группы этих членов такой множитель имеют. Этот факт может быть использован **для разложения многочлена на множители.**

Пример 1

Разложим на множители многочлен $A = 3ab + b^2 + 3ac + bc$.

Понятно, что если сгруппировать члены $3ab$, $3ac$ и b^2, bc, т. е. $A = (3ab + 3ac) + (b^2 + bc)$, то в первой группе есть общий множитель $3a$, во второй группе – общий множитель b. Вынесем эти множители за скобки и получим: $A = 3a(b + c) + b(b + c)$.

Теперь видно, что есть общий множитель $(b + c)$, который также можно вынести за скобки: $A = (b + c)(3a + b)$. Многочлен A разложен на произведение двух многочленов: $(b + c)$ и $(3a + b)$.

Заметим, что члены многочлена A можно сгруппировать и по-другому. Например, $A = (3ab + b^2) + (3ac + bc) = b(3a + b) + c(3a + b) = (3a + b)(b + c)$.

Разумеется, **независимо от способа первоначальной группировки членов многочлена A, было получено то же самое разложение на множители: $A = (3a + b)(b + c)$.**

Из примера видно, что для использования такого способа разложения необходимо: **сгруппировать члены многочлена, имеющие общий множитель, и вынести этот множитель за скобки.**

Часто при использовании такого способа разложения **некоторые члены многочлена приходится записывать в виде суммы двух слагаемых.**

Пример 2

Разложим на множители многочлен $A = a^2 + 9a + 20$.

Очевидно, что члены многочлена, а также различные группы членов общего множителя не имеют. Поэтому одночлен $9a$ представим в виде суммы двух членов, т. е. $9a = 4a + 5a$. Тогда данный многочлен имеет вид $A = a^2 + 4a + 5a + 20$. Попарно сгруппируем члены, имеющие общий множитель: $A = (a^2 + 4a) + (5a + 20)$. Слагаемые в первой скобке имеют общий множитель a, во второй скобке – общий множитель 5. Вынесем эти множители за скобки: $A = a(a + 4) + 5(a + 4)$. Теперь слагаемые имеют общий множитель $(a + 4)$, который вынесем за скобки: $A = (a + 4)(a + 5)$. Таким образом, данный многочлен A разложен на произведение двух многочленов: $a + 4$ и $a + 5$.

Пример 3

Разложим на множители многочлен $A = a^2 - 5ab + 6b^2$.

Ситуация аналогична предыдущему примеру. Поэтому одночлен $5ab$ представим в виде суммы двух членов, т. е. $5ab = 2ab + 3ab$. Тогда данный многочлен имеет вид $A = (a^2 - 2ab) + (-3ab + 6b^2)$. Слагаемые в первой скобке имеют общий множитель a, во второй скобке – общий множитель $(-3b)$. Вынесем эти множители за скобки: $A = a(a - 2b) -3b(a - 2b)$. Теперь слагаемые имеют общий множитель $(a - 2b)$, который вынесем за скобки: $A = (a - 2b)(a - 3b)$. Итак, данный многочлен A разложен на произведение двух многочленов: $a - 2b$ и $a - 3b$.

Этот прием разложения многочленов на множители также используется при решении уравнений и в задачах на делимость чисел.

Пример 4

Докажем, что при любом натуральном значении n значение выражения $A = n^3 + 3n^2 + 2n$ кратно 6. Разложим многочлен A на множители. Сначала используем способ вынесения общего множителя за скобки и получим $A = n(n^2 + 3n + 2)$. Теперь способом группировки разложим квадратный трехчлен $n^2 + 3n + 2$ на множители. Представим одночлен $3n$ в виде $3n = n + 2n$. Тогда получаем: $n^2 + 3n + 2 = n^2 + n +2n + 2 = (n^2 + n) + (2n + 2) = n(n + 1) + 2(n + 1) = (n + 1)(n + 2)$. Выражение A имеет вид $A = n(n + 1)(n + 2)$. Так как n натуральное число, то числа n, $n + 1$, $n + 2$ – три последовательных натуральных числа. Среди любых трех последовательных натуральных чисел (например, числа 13, 14, 15) хотя бы одно кратно 2 и хотя бы одно кратно 3. Поэтому произведение таких чисел будет кратно: $2 \cdot 3 = 6$. Итак, при любом натуральном значении n значение выражения $A = n^3 + 3n^2 + 2n$ кратно 6.

IV. Задание на уроках

№ 32.4 (а, б); 32.6 (в, г); 32.9 (а, б); 32.12 (в, г); 32.13 (а); 32.14 (а, г); 32.17 (а, б); 32.19 (г); 32.22 (а); 32.23 (б).

V. Контрольные работы

1. В каком случае используется способ группировки членов при разложении многочленов на множители?

2. Как разложить многочлен на множители способом группировки? Поясните на примерах.

VI. Задание на дом

№ 32.4 (в, г); 32.6 (а, б); 32.10 (в, г); 32.12 (а, б); 32.13 (б); 32.14 (б, в); 32.17 (в, г); 32.19 (а); 32.22 (б); 32.23 (а).

VII. Подведение итогов уроков

§ 33. Разложение многочленов на множители с помощью формул сокращенного умножения

Уроки 81–84. Применение формул сокращенного умножения для разложения многочленов

Цель: обсудить использование формул сокращенного умножения для разложения

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1. Разложите на множители многочлен:

а) $a(b-c)+2b-2c$;

б) $2x^2+xy-y^2$.

2. Решите уравнение:
   а) $x^3 + 2x^2 + x + 2 = 0$;
   б) $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Вариант 2

1. Разложите на множители многочлен:
   а) $a(b + c) + 4b + 4c$;
   б) $3x^2 - 2xy - y^2$.
2. Решите уравнение:
   а) $x^3 + 3x^2 + x + 3 = 0$;
   б) $x^2 - 6x + 8 = 0$.

III. Изучение нового материала

Формулы сокращенного умножения с успехом применяют для разложения многочленов на множители.

Формулы квадрата суммы и квадрата разности используют для разложения на множители многочленов вида $a^2 + 2ab + b^2$ и $a^2 - 2ab + b^2$, выделения полных квадратов суммы и разности чисел, доказательства тождеств, неравенств и т. д. Для этого формулы запишем, поменяв местами левую и правую части: $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ и $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$. Заметим, что выражение $c^2 = c \cdot c$. Поэтому приведенные формулы можно рассматривать как разложение многочлена на множители. Представление выражений $a^2 + 2ab + b^2$ в виде $(a + b)^2$ и $a^2 - 2ab + b^2$ в виде $(a - b)^2$ называют также выделением полных квадратов суммы и разницы.

Пример 1

Разложим на множители многочлен $4x^2 + 12x + 9$. Первое слагаемое $4x^2$ представляет собой квадрат выражения $2x$, третье – квадрат числа 3. Легко проверить, что второе слагаемое – удвоенное произведение выражения $2x$ и числа 3, т. е. $12x = 2 \cdot 2x \cdot 3$. Тогда данные многочлен имеет вид $4x^2 + 12x + 9 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2 = (2x + 3)^2$.

Пример 2

Разложим на множители выражение $9a^2 - 30ab^2 + 25b^4$. Первое слагаемое $9a^2$ является квадратом выражения $3a$, третье слагаемое $25b^4$ – квадратом выражения $5b^2$. Проверим, что второе слагаемое – удвоенное произведение выражений $3a$ и $5b^2$, т. е. $30ab^2 = 2 \cdot 3a \cdot 5b^2$. Тогда данный трехчлен имеет вид: $9a^2 - 30ab^2 + 25b^4 = (3a)^2 - 2 \cdot 3a \cdot 5b^2 + (5b^2)^2 = (3a - 5b^2)^2$.

Очень часто используют **формулу разности квадратов** для разложения многочленов на множители и решения задач на числа.

Пример 3

Разложим на множители выражение $25x^4 - 16y^2$.

Представим этот двучлен в виде разности квадратов и используем формулу разности квадратов: $25x^4 - 16y^2 = (5x^2)^2 - (4y)^2 = (5x^2 - 4y)(5x^2 + 4y)$.

Пример 4

Разложим на множители квадратный трехчлен $x^2 + 4x + 3$.

Дополним это выражение до квадрата суммы: $x^2 + 4x + 3 = x^2 + 4x + 4 - 1 = (x^2 + 4x + 4) - 1 = (x + 2)^2 - 1^2$. Затем применим формулу разности квадратов $(x + 2)^2 - 1 = (x + 2 - 1)(x + 2 + 1) = (x + 1)(x + 3)$. Таким образом, получили: $x^2 + 4x + 3 = (x + 1)(x + 3)$.

Заметим, что ранее для разложения квадратных трехчленов использовали способ группировки членов. Представим член $4x$ в виде $4x = x + 3x$. Тогда имеем: $x^2 + 4x + 3 = x^2 + x + 3x + 3 = (x^2 + x) + (3x + 3) = x(x + 1) + 3(x + 1) = (x + 1)(x + 3)$.

Пример 5

Разложим на множители двучлен $n^4 + 4$.

Для разложения двучлена дополним его до квадрата суммы. Для этого прибавим и вычтем $4n^2$ и используем формулу разности квадратов. Получаем: $n^4 + 4 = n^4 + 4 + 4n^2 - 4n^2 = (n^4 + 4n^2 + 4) - 4n^2 = (n^2 + 2)^2 - (2n)^2 = (n^2 + 2 - 2n)(n^2 + 2 + 2n) = (n^2 - 2n + 2)(n^2 + 2n + 2)$.

Пример 6

Докажем, что число $47^4 - 32^2$ составное.

Используем формулу разности квадратов и получим: $47^4 - 32^2 = (47^2)^2 - 32^2 = (47^2 - 32)(47^2 + 32)$. Видно, что у данного числа есть множители $47^2 - 32$ и $47^2 + 32$. Поэтому такое число по определению является составным.

Пример 7

Докажем, что число $16^4 - 231^2$ кратно 25.

Применим формулу разности квадратов и получим: $16^4 - 231^2 = (16^2)^2 - 231^2 = 256^2 - 231^2 = (256 - 231)(256 + 231) = 25 \cdot 487$. Так как данное число имеет делитель 25, то оно кратно 25.

Пример 8

Сократим дробь $\frac{53^2 - 32^2}{61^2 - 44^2}$.

Используя формулу разности квадратов, разложим числитель и знаменатель дроби на множители. Имеем: $\frac{53^2 - 32^2}{61^2 - 44^2} = \frac{(53-32)(53+32)}{(61-44)(61+44)} = \frac{21 \cdot 85}{17 \cdot 105} = \frac{21 \cdot 17 \cdot 5}{17 \cdot 21 \cdot 5} = 1$.

Также при разложении многочленов применяются **формулы суммы кубов и разности кубов**.

Пример 9

Разложим на множители многочлен $27a^3+64b^6$.

Представим данный многочлен в виде суммы кубов двух одночленов. Получаем: $27a^3+64b^6=(3a)^3+(4b^2)^3=(3a+4b^2)\cdot(9a^2-12ab^2+16b^4)$.

Пример 10

Докажем, что число 237^3-166^3 делится на 71.

Используем формулу разности кубов и запишем число в виде $273^3-166^3=(237-166)\cdot(237^2+237\cdot166+166^2)=71\cdot(237^2+237\cdot166+166^2)$. Очевидно, что это число кратно 71.

Из приведенных примеров видно, что формулы сокращенного умножения также полезны и при разложении многочленов на множители.

IV. Задание на уроках

№ 33.4 (а); 33.8 (а, г); 33.16 (в, г); 33.2 (а, в); 33.31 (а); 33.33 (в); 33.38 а, б); 33.46 (в, г); 33.48 (а, б).

V. Задание на дом

№ 33.4 (б); 33.8 (б, в); 33.16 (а, б); 33.22 (б, г); 33.31 (б); 33.33 (г); 33.38 (в, г); 33.46 (а, б); 33.48 (в, г).

VI. Подведение итогов уроков

§ 34. Разложение многочленов на множители с помощью комбинации различных приемов

Уроки 85–86. Разложение многочленов различными способами

Цель: отработать навыки применения разных приемов для разложения многочленов на множители.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1. Разложите многочлен на множители:
   а) $9a^2 - 16b^4$;
   б) $8a^3 + 27b^3$.
2. Решите уравнение $(3x - 1)^2 = (x + 3)^2$.
3. Постройте график уравнения $(3x - 2y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$.

Вариант 2

1. Разложите многочлен на множители:
   а) $9a^4 - 4b^2$;
   б) $27a^6 - 8b^3$.
2. Решите уравнение $(2x + 1)^2 = (x - 2)^2$.
3. Постройте график уравнения $(2x + 3y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$.

III. Изучение нового материала

В предыдущей и этой главах уже встречались задачи, в которых для разложения многочленов на множители использовались различные приемы. Рассмотрим еще несколько примеров.

Пример 1

Разложим на множители многочлен $2x^3y - 8x^2y^3 + 8xy^5$.

Сначала вынесем общий множитель за скобки: $2x^3y - 8x^2y^3 + 8xy^5 = 2xy(x^2 - 4xy^2 + 4y^4)$. Теперь обратим внимание на многочлен в скобках. Видно, что он является полным квадратом разности: $x^2 - 4xy^2 + 4y^4 = (x - 2y^2)^2$. Итак, мы разложили данный многочлен на множители: $2x^3y - 8x^2y^3 + 8xy^5 = 2xy(x - 2y^2)^2$.

Пример 2

Разложим на множители многочлен $4a^2 - 4c^2 + 4ab + b^2$.

Очевидно, что члены в многочлене общего множителя не имеют. Можно проверить, что попарная группировка членов ничего не дает. Учтем формулы сокращенного умножения. Сначала сгруппируем слагаемые, содержащие переменные a и b.

Получаем: $4a^2 - 4c^2 + 4ab + b^2 = (4a^2 + 4ab + b^2) - 4c^2 = (2a + b)^2 - (2c)^2$. Видно, что возникла разность квадратов. Применяя ее, имеем: $(2a + b)^2 - (2c)^2 = (2a + b - 2c)(2a + b + 2c)$. Итак, получили разложение многочлена на множители: $4a^2 - 4c^2 + 4ab + b^2 = (2a + b - 2c)(2a + b + 2c)$.

Пример 3

Найдем значение выражения $100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \ldots + 2^2 - 1^2$.

В приведенную сумму входят 100 чисел. Сгруппируем их последовательно попарно и используем формулу разности квадратов. Получаем: $100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \ldots + 2^2 - 1^2 = (100^2 - 99^2) + (98^2 - 97^2) + \ldots + (2^2 - 1^2) = (100 - 99)(100 + 99) + (98 - 97)(98 + 97) + \ldots + (2 - 1)(2 + 1) = 1 \cdot 199 + 1 \cdot 195 + \ldots + 1 \cdot 7 + 1 \cdot 3 = 199 + 195 + \ldots +$

$+ 7 + 3$. После группировки членов получилось 50 выражений, поэтому надо сложить 50 чисел: Каждое следующее число на 4 меньше предыдущего (т. е. числа образуют арифметическую прогрессию). Чтобы найти сумму чисел также сгруппируем их попарно: первое с последним, второе с предпоследним и т. д. Имеем: $199 + 195 + \ldots + 7 + 3 = (199 + 3) + (195 + 7) + \ldots = 202 + 202 + \ldots = 202 \cdot 25 = 5050$. Заметим, что при попарной группировке 50 чисел получилось 25 скобок и затем 25 одинаковых чисел 202.

IV. Задание на уроках

№ 34.9 (а, б); 34.12 (а, в); 34.15 (а, б); 34.16 (а); 34.18 (б); 34.20 (а, в); 34.26 (г); 34.27 (а, в); 34.28.

V. Задание на дом

№ 34.9 (в, г); 34.12 г); 34.15 (в, г); 34.16 (б); 34.18 (а); 34.20 (б, г); 34.26 (в); 34.27 (б, г); 34.29.

VI. Подведение итогов уроков

§ 35. Сокращение алгебраических дробей

Уроки 87–88. Алгебраическая дробь. Сокращение дроби

Цель: дать понятие алгебраической дроби, разложения на множители ее числителя и знаменателя, сокращения дроби.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1. Разложите на множители многочлен:

а) $5x^5y - 20xy^2$;

б) $4 - m^2 - n^2 + 2mn$.

2. Постройте график уравнения $y^2 - 3xy + 2y^2 = 0$.
3. Найдите $x^2 + y^2$, если $x + y = 7$ и $xy = 3$.

Вариант 2

1. Разложите на множители многочлен:
   а) $3xy^2 - 12x^5y$;
   б) $9 - m^2 - n^2 - 2mn$.
2. Постройте график уравнения $4y^2 - 5xy + x^2 = 0$.
3. Найдите $x^2 + y^2$, если $x + y = 5$ и $xy = 2$.

III. Изучение нового материала

В предыдущей главе при рассмотрении деления одночленов и многочленов на одночлен мы уже встречались с алгебраическими дробями. **Алгебраической дробью называют отношение двух многочленов P и Q**, т. е. $\frac{P}{Q}$. Как и в случае обыкновенных дробей, многочлен P называют числителем дроби, многочлен Q – знаменателем дроби.

Пример 1

а) Выражения $\frac{3x^2}{2y}$; $\frac{7a+4ab-3b^4}{2a+b}$; $\frac{2x-y^2}{x+3y}$ – алгебраические дроби.

б) Выражения $\frac{2a+2b}{7}$; $\frac{a}{3}$; $\frac{7a+3b}{2^2-1}$ не являются алгебраическими дробями, т. к. знаменатель не содержит переменных.

В случае алгебраических дробей (как и обыкновенных) возникает необходимость их сокращения. При этом дробь становится проще. Для сокращения дроби ее **числитель и знаменатель раскладывают на множители**, используя ранее изученные приемы.

Пример 2

Сократим алгебраические дроби:

а) $\frac{24x^3y^5}{8x^4y^2}$; б) $\frac{x^2+4xy+4y^2}{x^2-4y^2}$; в) $\frac{x^2-5xy+4y^2}{x^2-3xy-4y^2}$.

а) Найдем общий множитель числителя и знаменателя $8x^3y^2$ и сократим дробь: $\frac{24x^3y^5}{8x^4y^2} = \frac{8x^3y^2 \cdot 3y^3}{8x^3y^2 \cdot x} = \frac{3y^3}{x}$.

б) Учтем, что числитель дроби – квадрат суммы, знаменатель – разность квадратов. Разложив числитель и знаменатель дроби на множители, сократим ее: $\frac{x^2+4xy+4y^2}{x^2-4y^2} = \frac{(x+2y)^2}{x^2-(2y)^2} = \frac{(x+2y)(x+2y)}{(x-2y)(x+2y)} = \frac{x+2y}{x-2y}$.

в) Используя, например, группировку членов, разложим числитель и знаменатель дроби на множители и сократим ее: $\frac{x^2-5xy+4y^2}{x^2-3xy-4y^2}=\frac{(x-4y)(x-y)}{(x+y)(x-4y)}=\frac{x-y}{x+y}$.

Видно, что после сокращения алгебраическая дробь стала проще.

IV. Задание на уроках

№ 35.5 (б); 35.6 (г); 35.10 (б, г); 35.16 (а, г); 35.19 (б); 35.2 (г); 35.24 (б); 35.29 (а); 35.33 (а, б); 35.35 (г); 35.36 (а); 35.39 (а); 35.40 (в).

V. Контрольные вопросы

1. Какое выражение называют алгебраической дробью?
2. Как сократить алгебраическую дробь?

VI. Задание на дом

№ 35.5 (г); 356 (б); 35.11 (в, г); 35.16 (б, в); 35.19 (г); 35.22 (в); 35.24 (г); 35.29 б); 35.33 (в, г); 35.35 (а); 35.36 (б); 35.39 (б); 35.40 (а).

VII. Подведение итогов уроков

§ 36. Тождества

Урок 89. Тождественно равные выражения

Цель: рассмотреть понятие тождества.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).
2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1. Сократите дробь:

а) $\frac{16-8x+x^2}{x-4}$; б) $\frac{x^5-3x^2}{2x^7-6x^4}$; в) $\frac{7x^2y^2-14xy^3+7y^4}{x^4-2x^2y^2+y^4}$.

2. Вычислите:

а) $\dfrac{16^7-16^6}{8^{10}-8^9+8^8}$; б) $\dfrac{28^3-11^3}{28^2+28\cdot 11+11^2}$.

Вариант 2

1. Сократите дробь:

а) $\dfrac{25-10x+x^2}{x-5}$; б) $\dfrac{3x^4+2x^2}{15x^8+10x^6}$; в) $\dfrac{x^4-2x^2y^2+y^4}{6x^3y+12x^2y^2+6x^3y}$.

2. Вычислите:

а) $\dfrac{9^{23}+9^{22}+9^{21}}{27^{14}-27^{13}}$; б) $\dfrac{87^3+43^3}{87^2-87\cdot 43+43^2}$.

III. Изучение нового материала

Тождеством называется равенство, верное при любых значениях переменных. Чтобы доказать, что некоторое равенство является тождеством (чтобы доказать тождество) используют **тождественные преобразования** выражений. При этом можно доказать, что:

1) **левая часть** равенства после преобразования **равна правой части**;

2) наоборот, **правая часть** равенства после преобразований **равна левой части**;

3) **обе части** равенства после преобразований **равны одному и тому же выражению.**

При этом обе части называют выражениями **тождественно равными** друг другу.

Пример 1

Докажем тождество $a(b-c)-c(b-a)=b(a-c)$.

Преобразуем левую часть равенства. Для этого раскроем скобки и приведем подобные члены. Получаем: $a(b-c)-c(b-a)=ab-ac-$ $-bc+ac=ab-bc$. Вынесем общий множитель b за скобки: $ab-bc=$ $=b(a-c)$. В результате тождественных преобразований было показано, что **левая часть** равенства **равна правой**. Таким образом, тождество доказано.

Пример 2

Докажем тождество $6x^2+19x-7=(3x-1)(2x+7)$.

Преобразуем правую часть равенства. Для этого раскроем скобки, перемножив двучлены, и приведем подобные члены. Получаем: $(3x-1)(2x+7)=3x\cdot 2x+3x\cdot 7-1\cdot 2x-1\cdot 7=6x^2+19x-7$. В результате тождественных преобразований было показано, что **правая часть** равенства **равна левой**. Итак, тождество доказано.

Пример 3

Докажем тождество $(3a - 2b)(2a + 5b) - 6ab = (a - 2b)(6a + 3b) + 14ab - 4b^2$.

Преобразуем левую часть равенства, умножив многочлены и приведя подобные члены. Получаем: $(3a - 2b)(2a + 5b) - 6ab = 6a^2 + 15ab - 4ab - 10b^2 - 6ab = 6a^2 + 5ab - 10b^2$. Также преобразуем правую часть равенства, выполнив аналогичные действия. Имеем: $(a - 2b)(6a + 3b) + 14ab - 4b^2 = 6a^2 + 3ab - 12ab - 6b^2 + 14ab - 4b^2 = 6a^2 + 5ab - 10b^2$. В результате тождественных преобразований было показано, что **и левая и правая части равенства равны одному и тому же выражению** $6a^2 + 5ab - 10b^2$. Следовательно, тождество доказано.

В примерах 1–3 были рассмотрены многочлены. Обратимся к алгебраическим дробям.

Пример 4

Рассмотрим дробь $\frac{x^2 - x}{x^2 - 1}$. Разложим числитель и знаменатель дроби на множители $\frac{x(x-1)}{(x-1)(x+1)}$. Очевидно, такая дробь имеет смысл только при $x \neq \pm 1$. После сокращения получаем дробь $\frac{x}{x+1}$. Равенство $\frac{x^2 - x}{x^2 - 1} = \frac{x}{x+1}$ считают тождеством при всех допустимых значениях переменной (т. е. при всех x, кроме $x = 1$ и $x = -1$).

В связи с последним примером уточним понятие тождества. **Тождеством называют равенство, верное при любых допустимых значениях переменных.**

IV. Задание на уроке

№ 36.6 (б); 36.7 (а, б); 36.9 (г); 36.10 (а, в); 36.12 (б); 36.13 (г); 36.17 (а, б); 36. 19 (а).

V. Задание на дом

№ 36.6 (г); 36.7 (в, г); 36.9 (б); 36.10 (б, г); 36.12 (в); 36.13 (б); 36.17 (в, г); 36.19 (б).

VI. Подведение итогов урока

Уроки 90–91. Контрольная работа № 7 по теме «Разложение многочленов на множители»

Цель: проверка знаний учащихся с использованием разноуровневых вариантов.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Характеристика контрольной работы

Контрольная работа составлена в шести вариантах различной сложности (варианты 1, 2 – самые простые, варианты 3, 4 – средней сложности, варианты 5, 6 – самые сложные). При этом сложность вариантов нарастает не очень резко. Каждый вариант содержит шесть задач примерно одинаковой сложности (могут быть несколько сложнее две последние задачи).

При проверке вариантов 1, 2 оценка «5» ставится за правильное решение пяти задач, оценка «4» – четырех задач и оценка «3» – трех задач. Одна задача является резервной (или запасной) и дает некоторую возможность выбора учащимся. При таких же критериях оценки в случае вариантов 3, 4 дается дополнительно 0,5 балла и в случае вариантов 5, 6 – дополнительно 1,0 балл (учитывая более высокую сложность этих вариантов). Поэтому в случае вариантов 5, 6 оценку «5» можно получить за правильное решение четырех задач.

Выбор вариантов может быть сделан учителем или учащимся (при этом число экземпляров вариантов должно быть достаточным). Разумеется, учащиеся должны знать о различной сложности вариантов и критериях оценки контрольной работы.

III. Варианты работы

Вариант 1

1. Разложите многочлен на множители:
   а) $12ab - 3b^2$;
   б) $ac + bc - 2a - 2b$.
2. Решите уравнение $4x^3 - x = 0$.
3. Сократите дробь $\dfrac{6-6x}{x^2-2x+1}$.
4. Вычислите: $507^2 - 493^2$.
5. Найдите наименьшее значение выражения $7 - 4x + 4x^2$.
6. Постройте график функции $y = \dfrac{1-x^2}{x+1}$.

Вариант 2

1. Разложите многочлен на множители:

а) $8ab - 4b^2$;

б) $ac - bc + 5a - 5b$.

2. Решите уравнение $x - 9x^3 = 0$.

3. Сократите дробь $\frac{x^2 - 4x + 4}{12 - 6x}$.

4. Вычислите: $509^2 - 491^2$.

5. Найдите наименьшее значение выражения $10 - 6x + 9x^2$.

6. Постройте график функции $y = \frac{9 - x^2}{x + 3}$.

Вариант 3

1. Разложите многочлен на множители:

а) $2ax + 3by + 6ay + bx$;

б) $(3a - 2b)^2 - (a + b)(3a - 2b)$.

2. Решите уравнение $(3x + 1)(4x - 5) = (3x + 1)(2x - 1)$.

3. Сократите дробь $\frac{(x^2 - y^2)^2}{x^2 + 2xy + y^2}$.

4. Докажите, что выражение $3\cdot2^{34} + 5\cdot2^{33} - 7\cdot2^{31}$ кратно 37.

5. Найдите наибольшее значение выражения $6x - 9x^2$.

6. Постройте график функции $y = \frac{4x^2 - 4}{x + 1} - 2x + 1$.

Вариант 4

1. Разложите многочлен на множители:

а) $ay - 12bx + 3ax - 4by$;

б) $(2a - 5b)^2 - (a + 2b)(2a - 5b)$.

2. Решите уравнение $(2x + 3)(5x - 3) = (2x + 3)(2x + 6)$.

3. Сократите дробь $\frac{x^2 - 2xy + y^2}{(y^2 - x^2)^2}$.

4. Докажите, что выражение $5\cdot2^{48} - 3\cdot2^{47} - 4\cdot2^{45}$ кратно 24.

5. Найдите наибольшее значение выражения $4x - 4x^2$.

6. Постройте график функции $y = \frac{3x^2 - 3}{x - 1} - x - 2$.

Вариант 5

1. Докажите тождество $2a(a + b - c) - 2b(a - b - c) + 2c(a - b + c) = 2(a^2 + b^2 + c^2)$.

2. Разложите выражение на множители:

а) $18a^2 + 27ab + 14ac + 21bc$;

б) $a(3a - 2b)^2 + b(3a - 2b)(b + 3a)$.

3. Решите уравнение:

а) $x^2 + 8x + 15 = 0$;

б) $x^2 - 4 = 0$.

4. Докажите, что при любом натуральном значении n значение выражения $n^2 + 3n + 1$ будет нечетным числом.

5. Найдите целые значения x и y, удовлетворяющие равенству $y(x - 2) = 13 - 5x$.

6. Постройте график функции $y = \dfrac{x^2 + 2x}{|x|} + 1$.

Вариант 6

1. Докажите тождество $3c(a + b - c) + 3b(a - b - c) - 3a(a + b + c) = -3(a^2 + b^2 + c^2)$.

2. Разложите выражение на множители:

а) $16ab + 5bc + 10c^2 + 32ac$;

б) $b(2a - 3b)^2 + a(2a - 3b)(b + 2a)$.

3. Решите уравнение:

а) $x^2 + 7x + 10 = 0$;

б) $x^2 - 9 = 0$.

4. Докажите, что при любом натуральном значении n значение выражения $n^2 + 5n + 3$ будет нечетным числом.

5. Найдите целые значения x и y, удовлетворяющие равенству $x(y + 4) = 3y + 15$.

6. Постройте график функции $y = \dfrac{x^2 - 2x}{|x|} + 1$.

Урок 92. Итоги контрольной работы

Цели: сообщить результаты работы, рассмотреть наиболее типичные ошибки, разобрать трудные задачи.

Ход урока

I. Сообщение темы и целей урока

II. Итоги контрольной работы

1. Распределение работ по вариантам и результаты решения.

Данные о результатах работы удобно заносить в таблицу (для каждой пары вариантов).

№ задачи / Итоги	1	2	3	…	6
+	5				
±	1				
—	1				
∅	1				

Обозначения:

\+ – число решивших задачу правильно или почти правильно;

± – число решивших задачу со значительными погрешностями;

— – число не решивших задачу;

∅ – число не решавших задачу.

2. Типичные ошибки, возникшие при решении задач.

3. Наиболее трудные задачи и их разбор (учителем или школьниками, сделавшими эту задачу).

4. Разбор всей контрольной работы (вывесить на стенде ответы к заданиям вариантов и разбор наиболее трудных вариантов).

III. Ответы и решения

Ответы

Вариант 1

1. *Ответ*: а) $3b(4a-b)$; б) $(a+b)(c-2)$.

2. *Ответ*: $x=0,\ x=\pm\frac{1}{2}$.

3. *Ответ*: $\frac{6}{1-x}$.

4. *Ответ*: 14 000.

5. *Ответ*: 6.

6. *Ответ*: график $y=-x+1$ при $x\neq-1$.

Вариант 2

1. *Ответ*: а) $4b(2a-b)$; б) $(a-b)(c+5)$.

2. *Ответ*: $x=0,\ x=\pm\frac{1}{3}$.

3. *Ответ*: $\frac{2-x}{6}$.

4. *Ответ*: 18 000.

5. *Ответ*: 1.

6. *Ответ*: график $y=-x+3$ при $x\neq-3$.

Вариант 3

1. *Ответ*: а) $(2a+b)(x+3y)$; б) $(3a-2b)(2a-3b)$.

2. *Ответ*: $x = -\frac{1}{3}$ и $x = 2$.

3. *Ответ*: $(x-y)^2$.

4. *Ответ*: доказано.

5. *Ответ*: 1.

6. *Ответ*: график $y = 2x - 3$ при $x \neq -1$.

Вариант 4

1. *Ответ*: а) $(a-4b)(y+3x)$; б) $(2a-5b)(a-7b)$.

2. *Ответ*: $x = -\frac{3}{2}$ и $x = 3$.

3. *Ответ*: $\frac{1}{(x+y)^2}$.

4. *Ответ*: доказано.

5. *Ответ*: 1.

6. *Ответ*: график $y = 2x + 1$ при $x \neq 1$.

Решения

Вариант 5

1. Упростим данное выражение. Для этого раскроем скобки и приведем подобные члены. Получаем:

$2a(a+b-c) - 2b(a-b-c) + 2c(a-b+c) = 2a^2 + 2ab - 2ac - 2ba + {}$ $+ 2b^2 + 2bc + 2ca - 2cb + 2c^2 = 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2)$.

Ответ: доказано.

2. Разложим данное выражение на множители.

а) Сгруппируем члены и вынесем общие множители за скобки:

$18a^2 + 27ab + 14ac + 21bc = (18a^2 + 27ab) + (14ac + 21bc) =$ $= 9a(2a+3b) + 7c(2a+3b) = (2a+3b)(9a+7c)$.

б) В выражении вынесем общий множитель $3a - 2b$ за скобки: $a(3a-2b) + b(3a-2b)(b+3a) = (3a-2b)(a(3a-2b) + b(b+3a)) =$ $= (3a-2b)(3a^2 - 2ab + b^2 + 3ab) = (3a-2b)(3a^2 + ab + b^2)$.

Ответ: а) $(2a+3b)(9a+7c)$; б) $(3a-2b)(3a^2+ab+b^2)$.

3. Для решения данного уравнения разложим левую часть на множители.

а) В уравнении $x^2 + 8x + 15 = 0$ член $8x$ представим в виде суммы слагаемых $8x = 3x + 5x$. Запишем уравнение в виде $x^2 + 3x + 5x + {}$ $+ 15 = 0$, или $(x^2 + 3x) + (5x + 15) = 0$, или $x(x+3) + 5(x+3) = 0$, или $(x+3)(x+5) = 0$. Так как произведение множителей равно нулю, то хотя бы один из них равен нулю. Получаем линейные уравнения $x + 3 = 0$ (его корень $x = -3$) и $x + 5 = 0$ (корень $x = -5$). Итак, уравнение имеет два корня.

б) В уравнении $x^2 - 4 = 0$ добавим и вычтем $2x$. Тогда уравнение имеет вид $x^2 + 2x - 2x - 4 = 0$, или $(x^2 + 2x) + (-2x - 4) = 0$, или $x(x+2) - 2(x+2) = 0$, или $(x+2)(x-2) = 0$. Так как произведение множителей равно нулю, то хотя бы один из них равен нулю. Получаем линейные уравнения $x + 2 = 0$ (его корень $x = -2$) и $x - 2 = 0$ (корень $x = 2$). Это уравнение также имеет два корня.

Ответ: а) $x = -3$ и $x = -5$; б) $x = -2$ и $x = 2$.

4. Запишем данное выражение в виде $n^2 + 3n + 1 = n^2 + n + 2n + 1 = (n^2 + n) + 2n + 1 = n(n + 1) + 2n + 1$. При любом натуральном значении n числа n и $n + 1$ – два последовательных натуральных числа, поэтому одно из них число четное и произведение $n(n + 1)$ будет четным числом. Число $2n$ имеет множитель 2 и также является числом четным. Поэтому сумма четных чисел $n(n + 1)$ и $2n$ и нечетного числа 1 будет числом нечетным.

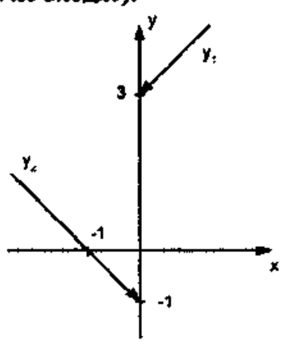
Ответ: доказано.

5. Преобразуем данное равенство $y(x - 2) = 13 - 5x$. Для этого запишем его в виде $y(x - 2) + 5x - 10 = 3$, или $y(x - 2) + 5(x - 2) = 3$, или $(x - 2)(y + 5) = 3$. По условию числа x и y – целые. Поэтому числа $x - 2$ и $y + 5$ также являются целыми. Тогда левая часть равенства является произведением двух целых чисел, которые будут делителями числа 3, стоящего в правой части. Рассмотрим четыре случая: $x - 2 = 1$ и $y + 5 = 3$ (откуда $x = 3$ и $y = -2$); $x - 2 = -1$ и $y + 5 = -3$ (откуда $x = 1$ и $y = -8$); $x - 2 = 3$ и $y + 5 = 1$ (откуда $x = 5$ и $y = -4$); $x - 2 = -3$ и $y + 5 = -1$ (откуда $x = -1$ и $y = -6$).

Ответ: $x = 3, y = -2$; $x = 1, y = -8$; $x = 5, y = -4$; $x = -1, y = -6$.

6. Преобразуем данную функцию $y=\dfrac{x^2+2x}{|x|}+1$. Учтем, что знаменатель $x \neq 0$. Разложим числитель дроби на множители и сократим дробь $y=\dfrac{x(x+2)}{|x|}+1$. Раскроем знак модуля и получим $y=\begin{cases} x+3, \text{ если } x>0 \\ -x-1, \text{ если } x<0 \end{cases}$.

Построим прямые $y_1 = x + 3$ при $x > 0$ и $y_2 = -x - 1$ при $x < 0$. Стрелками показано, что при $x = 0$ функция не существует (точки с координатой $x = 0$ в график не входят).



Ответ: см. график.

Вариант 6

1. Упростим выражение. Для этого раскроем скобки и приведем подобные члены. Получаем: $3c(a + b - c) + 3b(a - b - c) - 3a(a + b + c) = 3ca + 3bc - 3c^2 + 3ba - 3b^2 - 3bc - 3a^2 - 3ab - 3ac = -3a^2 - 3b^2 - 3c^2 = -3(a^2 + b^2 + c^2)$.

Ответ: доказано.

2. Разложим данное выражение на множители.

а) Сгруппируем члены и вынесем общие множители за скобки:

$16ab + 5bc + 10c^2 + 32ac = (16ab + 5bc) + (10c^2 + 32ac) = b(16a + 5c) + 2c(16a + 5c) = (16a + 5c)(b + 2c)$.

б) В выражении вынесем общий множитель $2a - 3b$ за скобки: $b(2a - 3b)^2 + a(2a - 3b)(b + 2a) = (2a - 3b)(b(2a - 3b) + a(b + 2a)) = (2a - 3b)(2ab - 3b^2 + ab + 2a^2) = (2a - 3b)(2a^2 + 3ab - 3b^2)$.

Ответ: а) $(16a + 5c)(b + 2c)$; б) $(2a - 3b)(2a^2 + 3ab - 3b^2)$.

3. Для решения данного уравнения разложим левую часть на множители.

а) В уравнении $x^2 + 7x + 10 = 0$ член $7x$ представим в виде суммы слагаемых $7x = 2x + 5x$. Запишем уравнение в виде $x^2 + 2x + 5x + 10 = 0$, или $(x^2 + 2x) + (5x + 10) = 0$, или $x(x + 2) + 5(x + 2) = 0$, или $(x + 2)(x + 5) = 0$. Так как произведение множителей равно нулю, то хотя бы один из них равен нулю. Получаем линейные уравнения $x + 2 = 0$ (его корень $x = -2$) и $x + 5 = 0$ (корень $x = -5$). Итак, уравнение имеет два корня.

б) В уравнении $x^2 - 9 = 0$ добавим и вычтем $3x$. Тогда уравнение имеет вид $x^2 + 3x - 3x - 9 = 0$, или $(x^2 + 3x) + (-3x - 9) = 0$, или $x(x + 3) - 3(x + 3) = 0$, или $(x + 3)(x - 3) = 0$. Так как произведение множителей равно нулю, то хотя бы один из них равен нулю. Получаем линейные уравнения $x + 3 = 0$ (его корень $x = -3$) и $x - 3 = 0$ (корень $x = 3$). Это уравнение также имеет два корня.

Ответ: а) $x = -2$ и $x = -5$; б) $x = -3$ и $x = 3$.

4. Запишем данное выражение в виде $n^2 + 5n + 3 = n^2 + n + 4n + 3 = (n^2 + n) + 4n + 3 = n(n + 1) + 4n + 3$. При любом натуральном значении n числа n и $n + 1$ – два последовательных натуральных числа, поэтому одно из них число четное и произведение $n(n + 1)$ будет четным числом. Число $4n$ имеет множитель 4 и также является числом четным. Поэтому сумма четных чисел $n(n + 1)$ и $4n$ и нечетного числа 3 будет числом нечетным.

Ответ: доказано.

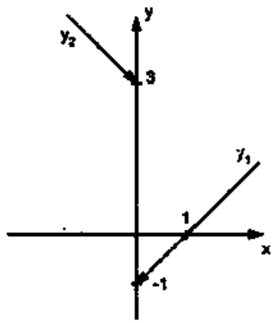
5. Преобразуем данное равенство $x(y + 4) = 3y + 15$. Для этого запишем его в виде $x(y + 4) - 3y - 12 = 3$, или $x(y + 4) - 3(y + 4) = 3$, или $(y + 4)(x - 3) = 3$. По условию числа x и y – целые. Поэтому числа $x + 4$ и $y - 3$ также являются целыми. Тогда левая часть равенства является произведением двух целых чисел, которые будут делителями числа 3, стоящего в правой части. Рассмотрим четыре случая:

$y+4=1$ и $x-3=3$ (откуда $x=6$ и $y=-3$); $y+4=-1$ и $x-3=-3$ (откуда $x=0$ и $y=-5$); $y+4=3$ и $x-3=1$ (откуда $x=4$ и $y=-1$); $y+4=-3$ и $x-3=-1$ (откуда $x=2$ и $y=-7$).

Ответ: $x=6, y=-3; x=0, y=-5; x=4, y=-1; x=2, y=-7$.

6. Преобразуем данную функцию $y=\dfrac{x^2-2x}{|x|}+1$. Учтем, что знаменатель $x\neq 0$. Разложим числитель дроби на множители и сократим дробь $y=\dfrac{x(x-2)}{|x|}+1$. Раскроем знак модуля и получим: $y=\begin{cases} x-1, \text{ если } x>0 \\ 3-x, \text{ если } x<0 \end{cases}$.

Построим прямые $y_1=x-1$ при $x>0$ и $y_2=3-x$ при $x<0$. Стрелками показано, что при $x=0$ функция не существует (точки с координатой $x=0$ в график не входят).



Ответ: см. график.

Глава 8. Функция $y = x^2$

§ 37. Функция $y = x^2$ и ее график

Урок 93. Квадратичная функция

Цель: рассмотреть функцию $y = x^2$, ее свойства и график.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Изучение нового материала

В главе 2 уже рассматривалась самая простая функция – линейная функция $y = kx + m$, ее свойства и график. Разумеется, могут существовать и любые другие зависимости между переменными x и y. Некоторые из этих зависимостей будут изучаться в старших классах. В конце 7 класса рассмотрим **квадратичную функцию** $y = x^2$, которая часто встречается в математике и в науке.

Зависимость площади квадрата S от его стороны a ($S = a^2$), зависимость кинетической энергии E тела массой m от его скорости v $\left(E = \dfrac{m \cdot v^2}{2}\right)$, зависимость потенциальной энергии E пружины, растянутой на длину l ($E = \dfrac{k \cdot l^2}{2}$, где k – коэффициент упругости пружины), и так далее описываются **квадратичной функцией** $y = x^2$. Рассмотрим таблицу значений такой функции и на основании ее построим график функции.

x	−3	−2,5	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
y	9	6,25	4	2,25	1	0,25	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9

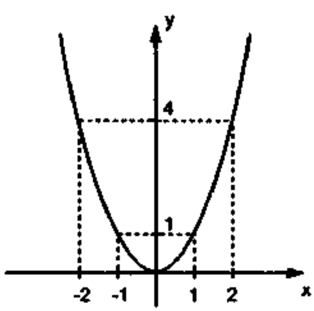


График функции $y = x^2$ называется **параболой**. Обсудим свойства такой функции:

1. **Область определения функции – все значения x.** Действительно, любое число x можно возвести в квадрат (вторую степень).

2. **Область значений функции – все значения $y \geq 0$.** При возведении в квадрат любого числа $x \neq 0$ получаем положительное число. При возведении в квадрат нуля получаем нуль. Поэтому значения $y \geq 0$ **и график функции расположен не ниже оси абсцисс.**

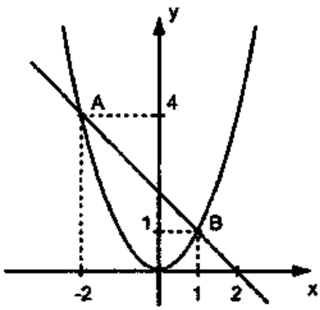
3. **График функции проходит через начало координат.**

4. **Противоположным значениям x** соответствует одно и то же значение y, так как $(-x)^2 = x^2$ при любом x. Поэтому **график функции симметричен относительно оси ординат.** Заметим, что такие функции называются **четными.**

Пример

Найдем точки пересечения параболы $y = x^2$ и прямой $y = 2 - x$.

Построим в одной системе координат параболу $y = x^2$ и прямую $y = 2 - x$. Они пересекаются в точках A и B. По чертежу можно найти координаты этих точек $A(-2; 4)$ и $B(1; 1)$.



Можно найти координаты таких точек и аналитически. Точки пересечения одновременно принадлежат двум графикам. Это означает, что координаты таких точек удовлетворяют уравнениям $y = x^2$ и $y = 2 - x$. Во втором уравнении заменим величину y на выражение x^2. Получим уравнение $x^2 = 2 - x$ или $x^2 + x - 2 = 0$. Левую часть уравнения легко разложить на множители: $(x + 2)(x - 1) = 0$ и решить его: $x = -2$ и $x = 1$. Для каждого из значений x по любой из формул $y = x^2$ или $y = 2 - x$ найдем y. Для $x = -2$ получаем: $y = (-2)^2 = 4$; для $x = 1$ находим: $y = 1^2 = 1$. Таким образом, нашли те же самые точки пересечения $A(-2; 4)$ и $B(1; 1)$.

В процессе решения этой задачи мы фактически графически решили уравнение $x^2 = 2 - x$.

III. Задание на уроке

№ 37.8; 37.14; 37.18; 37.27; 37.28 (а); 37.30 (а, г); 37.41; 37.49 (а); 37.53 (а, б); 37.56 (а).

IV. Контрольные вопросы

1. Какую функцию называют квадратичной?
2. Какая линия является графиком функции $y = x^2$?
3. Приведите основные свойства функции $y = x^2$.

V. Задание на дом

№ 37.7; 37.15; 37.19; 37.26; 37.28 (б); 37.30 (б, в); 37.42; 37.49 (б); 37.53 (в, г); 37.56 (б).

VI. Подведение итогов урока

§ 38. Графическое решение уравнений

Урок 94. Решение уравнений с помощью графиков

Цель: рассмотреть использование графиков при решении уравнений.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).
2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Какую функцию называют квадратичной?
2. Какие точки принадлежат графику функции $y = x^2$:
$A(-1; 4)$; $B(-3; 9)$; $C(-2; -4)$; $D(4; 16)$?
3. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $y = -x^2$ на отрезке $[-2; 3]$.

Вариант 2

1. Какая линия является графиком квадратичной функции?
2. Какие точки принадлежат графику функции $y = -x^2$:
$A(-1; -1)$; $B(3; 7)$; $C(2; -4)$; $D(4; 16)$?
3. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $y = x^2$ на отрезке $[-3; 2]$.

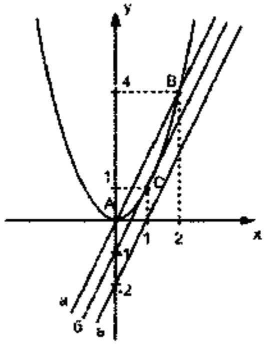
III. Изучение нового материала

В предыдущем разделе мы уже использовали графики для решения уравнения. Рассмотрим еще типовые ситуации.

Пример

Решим уравнение: а) $x^2 = 2x$; б) $x^2 = 2x - 1$; в) $x^2 = 2x - 2$.

Построим график функции $y = x^2$. В той же системе координат будем строить графики линейных функций.



а) График прямой $y = 2x$ (прямая *а*). Видно, что графики пересекаются в двух точках: $A(0; 0)$ и $B(2; 4)$. Это означает, что уравнение $x^2 = 2x$ имеет два корня: $x = 0$ и $x = 2$. Действительно, уравнение $x^2 = 2x$, или $x^2 - 2x = 0$, или $x(x - 2) = 0$ имеет такие корни.

б) График прямой $y = 2x - 1$ (прямая *б*). Видно, что графики имеют одну общую точку $C(1; 1)$, т. е. парабола $y = x^2$ и прямая $y = 2x - 1$ касаются друг друга. Это означает, что уравнение $x^2 = 2x - 1$ имеет один корень $x = 1$. Действительно, уравнение $x^2 = 2x - 1$, или $x^2 - 2x + 1 = 0$, или $(x - 1)^2 = 0$ имеет единственный корень.

в) График прямой $y = 2x - 2$ (прямая *в*). Видно, что парабола и прямая общих точек не имеют. Это означает, что уравнение $x^2 = 2x - 2$ не имеет корней. Действительно, в уравнении $x^2 = 2x - 2$, или $x^2 - 2x + 2 = 0$, или $(x - 1)^2 + 1 = 0$ выражение $(x - 1)^2 \geq 0$ при всех x. Поэтому равенство $(x - 1)^2 + 1 = 0$ не выполняется ни при каких x.

IV. Задание на уроке

№ 38.1 (а, б); 38.4 (а); 38.6; 38.8 (б); 38.9 (а); 38.12 (а, б); 38.14 (г); 38.16 (а).

V. Задание на дом

№ 38.1 (в, г); 38.4 (в); 38.7; 38.8 (а); 38.9 (б); 38.12 (а, б); 38.14 (б); 38.16 (в).

VI. Подведение итогов урока

§ 39. Что означает в математике запись $y = f(x)$

Уроки 95–96. Расширение понятия функции

Цель: рассмотреть кусочные функции.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1. Постройте график функции $y = \dfrac{x^3 - x^2}{x - 1}$.

2. Графически решите уравнение $x^2 + 2x - 3 = 0$.

Вариант 2

1. Постройте график функции $y = -\dfrac{x^3 + x^2}{x + 1}$.

2. Графически решите уравнение $x^2 - 2x - 3 = 0$.

III. Изучение нового материала

Начнем наше обсуждение с примера.

Пример 1

а) Найдем значение функции $y = 3x - 2$ при $x = 4$. Для этого надо число 3 умножить на 4 и из этого произведения вычесть число 2. Получаем $y = 10$.

б) Найдем значение функции $y = x^2 + 3$ при $x = 2$. Для этого надо число 2 возвести в квадрат и к полученному результату прибавить число 3. Получим $y = 7$.

Мы видим, что для вычисления величины y по заданному значению x надо выполнить набор определенных действий, операций. **Совокупность этих действий**, операций (алгоритм вычисления), называют **функцией** и обозначают символом $y = f(x)$.

Разумеется, функцию $y = f(x)$ можно задавать и несколькими формулами.

Пример 2

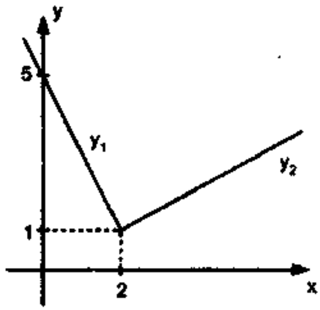
Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = \begin{cases} 5 - 2x, \text{ если } x < 2, \\ \dfrac{1}{2}x, \text{ если } x \geq 2. \end{cases}$

а) Вычислим $f(-1), f(0), f(1), f(2), f(3)$.

б) Построим график функции $y = f(x)$.

а) Так как $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$ удовлетворяют условию $x < 2$, то пользуемся первой формулой $f(x) = 5 - 2x$ и получаем: $f(-1) = 5 - 2 \cdot (-1) = 7$, $f(0) = 5 - 2 \cdot 0 = 5$, $f(1) = 5 - 2 \cdot 1 = 3$. Так как $x = 2$ и $x = 3$ удовлетворяют условию $x \geq 2$, то пользуемся второй формулой $f(x) = \frac{1}{2}x$ и получаем: $f(2) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$, $f(3) = \frac{1}{2} \cdot 3 = 1{,}5$.

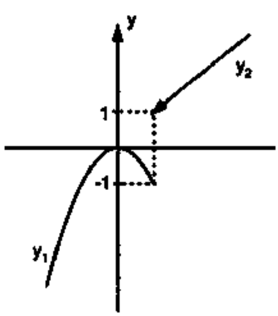
б) При $x < 2$ построим прямую $y_1 = 5 - 2x$ и при $x \geq 2$ строим прямую $y = \frac{1}{2}x$. Построенная ломаная линия является графиком данной функции $y = f(x)$. При этом графиком функции является непрерывная линия. Так как функция на разных участках задается разными формулами, то ее называют **кусочной функцией**.



В ряде случаев графиком может быть и линия, имеющая разрыв.

Пример 3

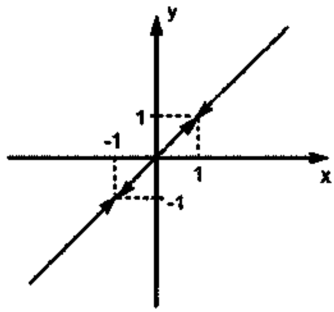
Построим график функции $y = f(x)$, где $f(x) = \begin{cases} -x^2, \text{ если } x \leq 1, \\ x, \text{ если } x > 1. \end{cases}$



При $x \le 1$ строим параболу $y_1 = -x^2$, при $x > 1$ строим прямую $y_2 = x$. Видно, что при $x = 1$ график функции имеет разрыв (не является непрерывной линией). Стрелка на графике показывает, что такая точка в график не входит.

Пример 4

Построим график функции $y = \dfrac{x^3 - x}{x^2 - 1}$.



Очевидно, что $x^2 - 1 \ne 0$, т. е. $x = \pm 1$. После сокращения дроби получим: $y = \dfrac{x^3 - x}{x^2 - 1} = \dfrac{x(x^2 - 1)}{x^2 - 1} = x$. Строим график прямой $y = x$, из которого удалены («выколоты») две точки с координатами $x = \pm 1$ (показаны стрелками).

IV. Задание на уроках

№ 39.5; 39.10 (а); 39.15 (б); 39.19 (а); 39.21; 39.26; 39.31 (а); 39.40; 39.45.

V. Задание на дом

№ 39.6; 39.10 (б); 39.15 (а); 39.22; 39.27; 39.31 (б); 39.41; 39.46.

VI. Подведение итогов уроков

Уроки 97–98. Контрольная работа № 8 по теме «Функция $y = x^2$ и ее график»

Цель: проверка знаний учащихся с использованием разноуровневых вариантов.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Характеристика контрольной работы

Контрольная работа составлена в шести вариантах различной сложности (варианты 1, 2 – самые простые, варианты 3, 4 – средней сложности, варианты 5, 6 – самые сложные). При этом сложность вариантов нарастает не очень резко. Каждый вариант содержит шесть задач примерно одинаковой сложности (могут быть несколько сложнее две последние задачи).

При проверке вариантов 1, 2 оценка «5» ставится за правильное решение пяти задач, оценка «4» – четырех задач и оценка «3» - трех задач. Одна задача является резервной (или запасной) и дает некоторую возможность выбора учащимся. При таких же критериях оценки в случае вариантов 3, 4 дается дополнительно 0,5 балла и в случае вариантов 5, 6 – дополнительно 1,0 балл (учитывая более высокую сложность этих вариантов). Поэтому в случае вариантов 5, 6 оценку «5» можно получить за правильное решение четырех задач.

Выбор вариантов может быть сделан учителем или учащимся (при этом число экземпляров вариантов должно быть достаточным). Разумеется, учащиеся должны знать о различной сложности вариантов и критериях оценки контрольной работы.

III. Варианты работы

Вариант 1

1. Принадлежит ли графику функции $y = x^2 - 4x + 1$ точка $A(2; -2)$; $B(-3; 22)$?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $y = x^2$ на отрезке $[-3; 2]$.

3. Дана функция $f(x) = 3x + 4$. Найдите: а) $f(2)$; б) $f(x - 1)$; в) $f(x^2)$.

4. Графически решите уравнение $x^2 + 2x = 0$.

5. Постройте график функции $f(x) = \begin{cases} x+1, \text{ если } x \ge 0, \\ 1, \text{ если } x < 0. \end{cases}$

6. Постройте график функции $y = \dfrac{x^2 - 1}{1 - x}$.

Вариант 2

1. Принадлежит ли графику функции $y = x^2 - 2x + 3$ точка $A(2; 3)$; $B(-1; 5)$?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $y = -x^2$ на отрезке $[-2; 3]$.

3. Дана функция $f(x) = 2x - 3$. Найдите: а) $f(3)$; б) $f(x - 2)$; в) $f(x^2)$.

4. Графически решите уравнение $-x^2 + 2x = 0$.

5. Постройте график функции $f(x) = \begin{cases} 1 - x, \text{ если } x < 0, \\ 1, \text{ если } x \ge 0. \end{cases}$

6. Постройте график функции $y = \frac{1 - x^2}{x + 1}$.

Вариант 3

1. На графике функции $y = x^2$ найдите точку, абсцисса которой равна ординате.

2. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $y = 3x - 1$ на отрезке $[-2; 3]$.

3. Дана функция $f(x) = 2x - 3$. Найдите: а) $f(-3)$; б) $f(2 - 3x)$; в) $f(x^2 - 4)$.

4. Графически решите уравнение $x^2 = x + 6$.

5. Постройте график функции $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, \text{ если } x \geq 1, \\ -x + 3, \text{ если } x < 1. \end{cases}$

6. Постройте график функции $y = \frac{x^2 - x^3}{x - 1}$.

Вариант 4

1. На графике функции $y = x^2$ найдите точку, абсцисса и ордината которой противоположные числа.

2. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $y = -2x + 3$ на отрезке $[-3; 2]$.

3. Дана функция $f(x) = 3x + 4$. Найдите: а) $f(-2)$; б) $f(1 - 2x)$; в) $f(2x^2 + 3)$.

4. Графически решите уравнение $x^2 = 2x + 3$.

5. Постройте график функции $f(x) = 2\begin{cases} 3 - x, \text{ если } x \geq 1, \\ 2x + 1, \text{ если } x < 1. \end{cases}$

6. Постройте график функции $y = \frac{x^3 + x^2}{x + 1}$.

Вариант 5

1. На графике функции $y = 3x - 4$ найдите точку, ордината которой равна абсциссе.

2. Пусть A – наименьшее значение функции $y = x^2$ на отрезке $[-1; 2]$, B – наибольшее значение функции $y = 2x - 2$ на отрезке $[-1; 1]$. Сравните числа A и B. Сделайте графическую иллюстрацию.

3. Дана функция $f(x) = x^2$. Найдите: а) $f(-2)$; б) $f(-3x)$; в) $f(-2x + 3)$.

4. Найдите точки пересечения параболы $y = x^2$ и прямой $y = x + 2$.

5. При каких значениях a уравнение $\frac{x^3 - x^4}{x^2 - x} = a$ имеет один корень?

6. Постройте график функции $y = f(x)$, где $f(x)=\begin{cases} x+2, \text{ если } x<-1, \\ |x|, \text{ если } x \geq -1. \end{cases}$

Вариант 6

1. На графике функции $y = 5x - 8$ найдите точку, ордината которой равна абсциссе.

2. Пусть A – наименьшее значение функции $y = x^2$ на отрезке $[-2; 1]$, B – наибольшее значение функции $y = 3x - 3$ на отрезке $[-1; 1]$. Сравните числа A и B. Сделайте графическую иллюстрацию.

3. Дана функция $f(x) = x^2$. Найдите: а) $f(-3)$; б) $f(-2x)$; в) $f(3x - 2)$.

4. Найдите точки пересечения параболы $y = x^2$ и прямой $y = -x + 6$.

5. При каких значениях a уравнение $\dfrac{x^4-2x^3}{x^2-2x}=a$ имеет один корень?

6. Постройте график функции $y = f(x)$, где $f(x)=\begin{cases} |x|, \text{ если } x \leq 1, \\ 2-x, \text{ если } x>1. \end{cases}$

Урок 99. Итоги контрольной работы

Цели: сообщить результаты работы, рассмотреть наиболее типичные ошибки, разобрать трудные задачи.

Ход урока

I. Сообщение темы и целей урока

II. Итоги контрольной работы

1. Распределение работ по вариантам и результаты решения.

Данные о результатах работы удобно заносить в таблицу (для каждой пары вариантов).

№ задачи / Итоги	1	2	3	…	6
+	5				
±	1				
—	1				
Ø	1				

Обозначения:

\+ – число решивших задачу правильно или почти правильно;

± – число решивших задачу со значительными погрешностями;

— – число не решивших задачу;

Ø – число не решавших задачу.

2. Типичные ошибки, возникшие при решении задач.

3. Наиболее трудные задачи и их разбор (учителем или школьниками, сделавшими эту задачу).

4. Разбор всей контрольной работы (вывесить на стенде ответы к заданиям вариантов и разбор наиболее трудных вариантов).

III. Ответы и решения

Ответы

Вариант 1

1. *Ответ*: A – не принадлежит, B – принадлежит.
2. *Ответ*: $y_{max} = 9$ и $y_{min} = 0$.
3. *Ответ*: $f(2) = 10, f(x-1) = 3x+1, f(x^2) = 3x^2+4$.
4. *Ответ*: $x = -2$ и $x = 0$.
6. График $y = -x - 1$, за исключением точки $(1; -2)$.

Вариант 2

1. *Ответ*: A – принадлежит, B – не принадлежит.
2. *Ответ*: $y_{max} = 0$ и $y_{min} = -9$.
3. *Ответ*: $f(3) = 3, f(x-2) = 2x-7, f(x^2) = 2x^2-3$.
4. *Ответ*: $x = 0$ и $x = 2$.
6. График $y = 1 - x$, за исключением точки $(-1; 2)$.

Вариант 3

1. *Ответ*: $(0; 0)$ и $(1; 1)$.
2. *Ответ*: $y_{max} = 8$ и $y_{min} = -7$.
3. *Ответ*: $f(-3) = -9, f(2-3x) = -6x+1, f(x^2-4) = 2x^2-11$.
4. *Ответ*: $x = -2$ и $x = 3$.
6. График $y = -x^2$, за исключением точки $(1; -1)$.

Вариант 4

1. *Ответ*: $(-1; 1)$.
2. *Ответ*: $y_{max} = 9$ и $y_{min} = -1$.
3. *Ответ*: $f(-2) = -2, f(1-2x) = -6x+7, f(2x^2+3) = 6x^2+13$.
4. *Ответ*: $x = -1$ и $x = 3$.
6. График $y = x^2$, за исключением точки $(-1; 1)$.

Решения

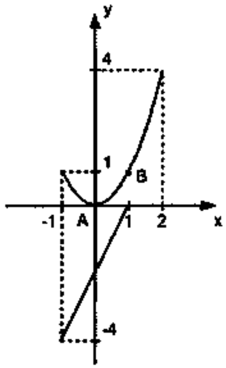
Вариант 5

1. Так как ордината и абсцисса точки равны, то получаем уравнение $3x - 4 = x$, откуда $x = 2$. Итак, точка $(2; 2)$.

Ответ: $(2; 2)$.

2. Найдем наименьшее значение функции $y = x^2$ на отрезке $[-1; 2]$. Оно достигается при $x = 0$ и равно $A = 0$. Найдем наибольшее значение функции $y = 2x - 2$ на отрезке $[-1; 1]$. Оно достигается при $x = 1$

и равно $B = 0$. Видно, что $A = B$. Построим графики данных функций на указанных промежутках. Из рассмотренных графиков получаем тот же результат: $A = B$.



Ответ: $A = B$.

3. Подставим значения аргумента в функцию $f(x) = x^2$ и получим: а) $f(-2) = (-2)^2 = 4$; б) $f(-3x) = (-3x)^2 = 9x^2$; в) $f(-2x + 3) = (-2x + 3)^2 =$ $= (2x - 3)^2$.

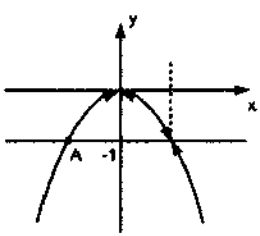
Ответ: а) $f(-2) = 4$; б) $f(-3x) = 9x^2$; в) $f(-2x + 3) = (2x - 3)^2$.

4. Точки пересечения параболы и прямой удовлетворяют уравнениям $y = x^2$ и $y = x + 4$. Приравняем правые части этих уравнений и получим уравнение $x^2 = x + 2$ или $x^2 - x - 2 = 0$. Разложим левую часть на множители: $(x - 2)(x + 1) = 0$. Корни этого уравнения $x = 2$ и $x = -1$. По формуле $y = x^2$ найдем соответствующие значения $y = 4$ и $y = 1$. Итак, точки пересечения (2; 2) и (−1; 1).

Ответ: (2; 4) и (−1; 1).

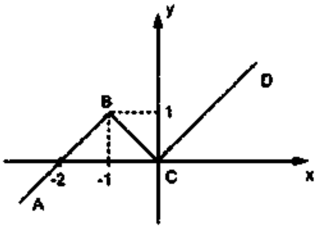
5. Уравнение $\dfrac{x^3 - x^4}{x^2 - x} = a$ можно записать в виде $-x^2 = a$, при этом $x \neq 0$ и $x \neq 1$.

Построим график функции $y = -x^2$ для $x \neq 0$ и $x \neq 1$. Также построим горизонтальную линию $y = a$. Видно, что только при $a = -1$ графики функций пересекаются в одной точке. Поэтому данное уравнение имеет один корень.



Ответ: $a = -1$.

6. При $x < -1$ построим график функции $y = x + 2$ (луч AB), при $x \geq -1$ график функции $y = |x|$ (ломаная BCD). Итак, ломаная $ABCD$ – график данной функции.



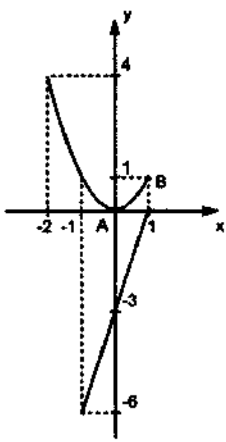
Ответ: см. рисунок.

Вариант 6

1. Так как ордината и абсцисса точки равны, то получаем уравнение $5x - 8 = x$, откуда $x = 2$. Итак, точка (2; 2).

Ответ: (2; 2).

2. Найдем наименьшее значение функции $y = x^2$ на отрезке $[-2; 1]$. Оно достигается при $x = 0$ и равно $A = 0$. Найдем наибольшее значение функции $y = 3x - 3$ на отрезке $[-1; 1]$. Оно достигается при $x = 1$ и равно $B = 0$. Видно, что $A = B$. Построим графики данных функций на указанных промежутках. Из рассмотренных графиков получаем тот же результат: $A = B$.



Ответ: $A = B$.

3. Подставим значения аргумента в функцию $f(x) = x^2$ и получим:
а) $f(-3) = (-3)^2 = 9$; б) $f(-2x) = (-2x)^2 = 4x^2$; в) $f(3x - 2) = (3x - 2)^2$.

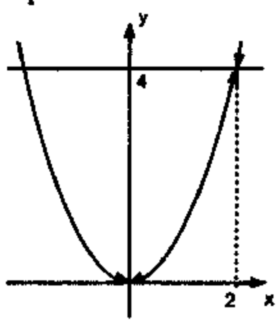
Ответ: а) $f(-3) = 9$; б) $f(-2x) = 4x^2$; в) $f(3x - 2) = (3x - 2)^2$.

4. Точки пересечения параболы и прямой удовлетворяют уравнениям $y = x^2$ и $y = -x + 6$. Приравняем правые части этих уравнений и получим уравнение $x^2 = -x + 6$ или $x^2 + x - 6 = 0$. Разложим левую

часть на множители: $(x + 3)(x - 2) = 0$. Корни этого уравнения $x = -3$ и $x = 2$. По формуле $y = x^2$ найдем соответствующие значения $y = 9$ и $y = 4$. Итак, точки пересечения $(-3; 9)$ и $(2; 4)$.

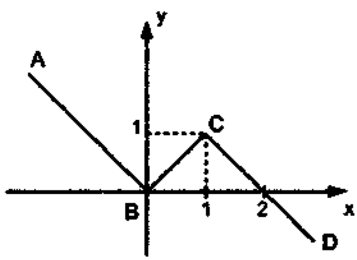
Ответ: $(-3; 9)$ и $(2; 4)$.

5. Уравнение $\dfrac{x^4 - 2x^3}{x^2 - 2x} = a$ можно записать в виде $x^2 = a$ (при этом $x \neq 0$ и $x \neq 2$). Построим график функции $y = x^2$ для $x \neq 0$ и $x \neq 2$. Также построим горизонтальную линию $y = a$. Видно, что только при $a = 4$ графики функций пересекаются в одной точке. Поэтому данное уравнение имеет один корень.



Ответ: $a = 4$.

6. При $x \leq 1$ построим график функции $y = |x|$ (ломаная ABC), при $x > 1$ – график функции $y = 2 - x$ (луч CD). Итак, ломаная $ABCD$ – график данной функции.



Ответ: см. рисунок.

Повторение курса 7 класса

Подготовка к итоговой контрольной работе

Уроки 100–101. Повторение темы «Функции и графики»

Цель: повторить способы решения типичных задач по теме.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Основные понятия

В начале урока полезно напомнить учащимся основные понятия темы (желательно с широким привлечением самих учащихся).

Функцией (или функциональной зависимостью) называют такую зависимость переменной y от переменной x, при которой каждому значению x соответствует единственное значение y. Переменную x называют независимой переменной (или аргументом), переменную y – зависимой переменной. **Область определения функции** – все значения, которые может принимать независимая переменная x. **Область значений** (или область изменения) функции – те значения, которые при этом принимает зависимая переменная y.

Способы задания функции:

1) аналитический;
2) табличный;
3) графический.

Линейной функцией называется функция вида $y = kx + m$ (где k и m – некоторые числа). Графиком линейной функции является **прямая линия**. Функцию $y = kx$ называют **прямой пропорциональной зависимостью**. Графиком прямой пропорциональности является прямая, проходящая через начало координат.

Квадратичной функцией называется функция вида $y = x^2$ или $y = -x^2$. Графиком квадратичной функции является **парабола**.

III. Задание на уроках

№ 4(а); 6 (а, б); 10; 14 (в, г); 17 (б); 23 (г); 24 (а, г); 37; 31 (б); 34 (а, б); 35 (в, г); 37; 39 (а, г); 43 (а); 44 (б); 46.

IV. Задание на дом

№ 4(б); 6 (в, г); 11; 14 (а, б); 17 (г); 23 (б); 25 (в, г); 28; 32 (б); 34 (в, г); 35 (а, б); 38; 40 (б, в); 43 (б); 44 (а); 47.

V. Подведение итогов уроков

Уроки 102–103. Повторение темы «Линейные уравнения и системы уравнений»

Цель: повторить способы решения типичных задач по теме.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Основные понятия

В начале урока полезно с помощью фронтального опроса учащихся вспомнить основные понятия данной темы.

Равенства, которые выполняются при определенных значениях переменной (переменных), называют **уравнениями**: $3x - 1 = 5$, $x^2 - 9 = 0$, $x^2 + y^2 = 0$ и т. д. Каждое такое значение переменной (переменных) называют **корнем (решением) уравнения**. Решить уравнение означает, что нужно **найти** все его **решения или доказать, что их нет**.

Линейным уравнением с одной переменной x называют уравнение вида $ax + b = 0$, где a и b – любые числа (коэффициенты). Такое уравнение при $a \neq 0$ имеет единственный корень $x = -\frac{b}{a}$, при $a = 0$ и $b \neq 0$ решений не имеет, при $a = 0$ и $b = 0$ имеет бесконечное множество решений (любое число x будет корнем уравнения).

Для решения линейных уравнений надо:

1. Слагаемые, зависящие от x, перенести в одну часть уравнения, числа – в другую часть.
2. Привести подобные члены в каждой части уравнения.
3. Найти неизвестную (переменную) x.

Равенство, содержащее две переменные, называют **уравнением с двумя переменными** (или неизвестными). Если в уравнение неизвестные входят только **в первой степени**, то такое уравнение называют **линейным уравнением с двумя переменными.** Линейное уравнение имеет вид $ax + by + c = 0$ (где x и y – переменные, a, b и c – некоторые числа). **Решением уравнения** с двумя неизвестными называют пару значений переменных, при подстановке которых уравнение становится верным числовым равенством.

Уравнения с двумя переменными, **имеющие одни и те же решения**, называют **равносильными**. Уравнения с двумя переменными, не имеющие решений, также считают равносильными.

Уравнения с двумя неизвестными обладают такими же свойствами, как и уравнения с одной переменной:

1) если в уравнении перенести любой член из одной части в другую, изменив его знак, то получится уравнение, равносильное данному;

2) если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же (не равное нулю) число, то получится уравнение, равносильное данному.

Система двух линейных уравнений с двумя неизвестными имеет вид $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases}$, где x и y – неизвестные, a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 – некоторые числа.

1) Если $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$, то система имеет единственное решение.

2) Если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$, то система не имеет решений.

3) Если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, то система имеет бесконечно много решений.

Способы решения систем двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

1) графический способ;
2) способ подстановки;
3) способ сложения.

III. Задание на уроках

№ 51 (а, б); 53 (в, г); 54 (а, б); 55; 61; 63; 68; 72; 74; 76; 78; 85 (а, б); 86 (в, г); 88 (а, б); 102.

IV. Задание на дом

№ 51 (в); 53 (а, б); 54 (в, г); 56; 60; 64; 69; 75; 77; 79; 85 (в, г); 86 (а, б); 88 (в, г); 100.

V. Подведение итогов уроков

Уроки 104–106. Повторение темы «Алгебраические преобразования»

Цель: вспомнить приемы решения типичных задач по теме.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Основные понятия

С помощью учащихся полезно напомнить основные понятия темы.

Алгебраические выражения

Алгебраическим выражением называется запись, составленная из букв и чисел с помощью арифметических действий и скобок. **Переменными** называются **буквы**, входящие в алгебраическое выражение. **Значением алгебраического выражения** называется значение числового выражения, которое получается при подстановке в алгебраическое выражение выбранных значений переменных. **Допустимыми значениями переменных** в алгебраическом выражении называются такие значения переменных, для которых данное выражение имеет смысл (т. е. выполнимы все действия с этими переменными).

Формулой называется **равенство**, обе части которого являются алгебраическими выражениями.

Тождественно равными выражениями называются выражения, соответственные значения которых равны при любых допустимых значениях переменных. **Тождеством** называется **равенство**, связывающее два тождественно равные выражения. **Тождественным преобразованием** выражения называют замену этого выражения тождественно равным ему.

Степень с натуральным показателем и ее свойства

Степенью числа a с натуральным показателем n ($n \geq 2$) называется произведение n одинаковых сомножителей a, т. е. $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{n}$.

Повторяющийся **множитель** a называют **основанием степени**, число повторяющихся множителей n – **показателем степени**. При этом $a^1 = a$ и для $a \neq 0$ $a^0 = 0$.

Свойства степеней с натуральным показателем:

1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ (при умножении степеней с одинаковыми основаниями основание оставляют тем же, а показатели степеней складывают).

2) $a^m : a^n = a^{m-n}$, где $a \neq 0$, $m \geq n$ (при делении степеней с одинаковыми основаниями основание оставляют тем же, а из показателя степени делимого вычитают показатель степени делителя).

3) $(a^m)^n = a^{mn}$ (при возведении степени в степень основание оставляют тем же, а показатели степени умножают).

4) $(ab)^n = a^n b^n$ (при возведении в степень произведение возводят в эту степень каждый множитель и результаты умножают).

5) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$, где $b \neq 0$ (при возведении в степень частного возводят в эту степень числитель и знаменатель и результаты делят).

Одночлены и многочлены

Одночленом называют произведение чисел, переменных и их степеней, а также сами числа, переменные и их степени. **Степенью одночлена** считается сумма показателей степеней всех переменных, входящих в одночлен. Если одночлен не содержит переменных (т. е. является числом), то его степень равна нулю. Одночлен, записанный в виде произведения числового множителя (**коэффициента** одночлена), стоящего на первом месте, и степеней различных переменных, считают **стандартным видом одночлена**.

Многочленом называют **алгебраическую сумму одночленов**. Сами одночлены называют членами многочлена. Одночлены можно рассматривать как многочлены, состоящие из одночлена. В многочленах алгебраические суммы подобных членов заменяют одним одночленом (приведение подобных членов). Многочлен имеет **стандартный вид**, если все входящие в него одночлены записаны в стандартном виде и приведены подобные члены. **Степенью многочлена стандартного вида** называют наибольшую из степеней входящих в него одночленов.

При сложении и вычитании многочленов используют **правило раскрытия скобок**. Если перед скобками стоит знак «плюс», то скобки можно опустить, сохраняя знак каждого слагаемого, заключенного в скобки. Если перед скобками стоит знак «минус», то скобки можно опустить, изменяя знак каждого слагаемого, заключенного в скобки.

Чтобы **умножить одночлен на многочлен**, надо умножить этот одночлен на каждый член многочлена и полученные произведения сложить. Чтобы **умножить многочлен на множители**, надо каждый член одного многочлена умножить на каждый член другого многочлена и полученные произведения сложить.

Запись данного многочлена в виде произведения других многочленов называют **разложением многочлена на множители**. Для разложения многочленов на множители используют **способы**:

1) вынесения общего множителя за скобки;

2) группировки членов многочлена;

3) использования формул сокращенного умножения.

Формулы сокращенного умножения

1) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (квадрат суммы двух выражений равен квадрату первого выражения плюс удвоенное произведение первого и второго выражений плюс квадрат второго выражения).

2) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ (квадрат разности двух выражений равен квадрату первого выражения минус удвоенное произведение первого и второго выражений плюс квадрат второго выражения).

3) $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ (разность квадратов двух выражений равна произведению разности и суммы этих выражений).

4) $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ (сумма кубов двух выражений равна произведению суммы этих выражений и неполного квадрата их разности).

5) $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ (разность кубов двух выражений равна произведению разности этих выражений и неполного квадрата их суммы).

III. Задание на уроках

№ 108 (а); 111 (в, г); 120 (а, б); 123 (в, г); 131 (а, б); 134 (в, г); 135 (а, г); 138 (а, в); 139 (а, б); 140 (в, г); 143 (а, б); 150 (в, г); 154 (а, б); 181 (в, г); 187 (а, б).

IV. Задание на дом

№ 108 (в, г); 111 (а, б); 120 (в, г); 123 (а, б); 131 (в, г); 134 (а, б); 135 (б, в); 138 (б, г); 139 (в, г); 140 (а, б); 143 (в, г); 150 (а, б); 154 (в, г); 181 (а, б); 187 (в, г).

V. Подведение итогов уроков

Урок 107. Итоговая контрольная работа

Цель: итоговая аттестация учащихся по базовым темам курса.

Ход урока

I. Характеристика контрольной работы

Работа составлена в двух вариантах. Все задачи имеют примерно одинаковую сложность и контролируют основные навыки:

1) уметь проводить преобразования алгебраических выражений с использованием формул сокращенного умножения и вычислять их числовые значения;

2) решать линейные и простейшие нелинейные уравнения;

3) использовать свойства степени с натуральным показателем для вычисления значений числовых выражений;

4) уметь строить графики линейных и квадратичных функций, определять принадлежность данной точки графику функции;

5) решать системы линейных уравнений и применять такие системы для решения текстовых задач.

II. Оценка результатов работы

Оценка «5» ставится за любые пять правильно решенных задач, оценка «4» – за четыре задачи, оценка «3» – за три задачи. Поэтому у учащихся имеется некоторая свобода выбора за счет шестой задачи.

III. Варианты контрольной работы

Вариант 1

1. Упростите выражение $(a + 2b)^2 - (a - b)(a + b) - 5b^2$ и найдите его значение при $a = 2$, $b = \frac{1}{4}$.

2. Решите уравнение $\frac{25x^2 - 4}{15x - 6} - \frac{1 - 9x^2}{5 + 15x} = 5$.

3. Найдите значение выражения $\frac{36^3 \cdot 15^2}{18^4 \cdot 10^3}$.

4. Постройте график функции $y = f(x)$, где $f(x) = \begin{cases} x - 1, \text{ если } x < 2, \\ 5 - 2x, \text{ если } x \geq 2. \end{cases}$

При всех значениях параметра a определите число корней уравнения $f(x) = a$.

5. Сумма двух чисел равна 100, а сумма 25% первого числа и 75% второго числа равна 59. Найдите эти числа.

6. Решите уравнение $(x - 2)(5x + 3) = (x - 2)(3x - 5)$.

Вариант 2

1. Упростите выражение $(2a + b)^2 - (2a - 3b)(3b + 2a) - 10b^2$ и найдите его значение при $a = \frac{1}{4}$, $b = 3$.

2. Решите уравнение $\frac{16x^2 - 4}{28x - 14} - \frac{25 - 9x^2}{20 + 12x} = 3$.

3. Найдите значение выражения $\frac{22^4 \cdot 3^3}{6^2 \cdot 121^2}$.

4. Постройте график функции $y = f(x)$, где $f(x) = \begin{cases} -x - 2, \text{ если } x \leq -1, \\ 2x + 1, \text{ если } x > -1. \end{cases}$

При всех значениях параметра a определите число корней уравнения $f(x) = a$.

5. Сумма двух чисел равна 90, а сумма 75% первого числа и 50% второго числа равна 61. Найдите эти числа.

6. Решите уравнение $(x - 3)(6x + 5) = (x - 3)(2x - 3)$.

IV. Разбор заданий вариантов

Вариант 1

1. Используем формулы квадрата суммы и разности квадратов, приведем подобные члены и упростим данное выражение. Получаем: $(a+2b)^2 - (a-b)(a+b) - 5b^2 = a^2 + 4ab + 4b^2 - (a^2 - b^2) - 5b^2 =$

$= a^2 + 4ab + 4b^2 - a^2 + b^2 - 5b^2 = 4ab$. Найдем значение этого выражения при $a = 2$, $b = \frac{1}{4}$. Имеем: $4 \cdot 2 \cdot \frac{1}{4} = 2$.

Ответ: 4 ab, 2.

2. Прежде всего разложим числители и знаменатели дробей на множители и сократим их: $\frac{(5x-2)(5x+2)}{3(5x-2)} + \frac{(3x-1)(3x+1)}{5(3x+1)} = 5$. Умножим все члены уравнения $\frac{5x+2}{3} + \frac{3x-1}{5} = 5$ на число 15. Получаем равносильное уравнение $\frac{5x+2}{3} \cdot 15 + \frac{x-1}{5} \cdot 15 = 5 \cdot 15$, или $(5x + 2) \cdot 5 + (3x - 1) \cdot 3 = 75$, или $25x + 10 + 9x - 3 = 75$, или $34x = 68$, откуда $x = 2$.

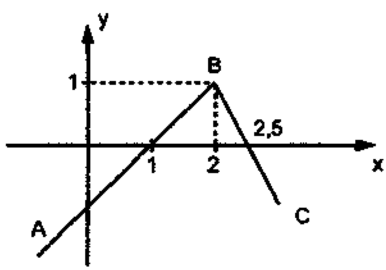
Ответ: $x = 2$.

3. Разложим числа, входящие в выражение, на простые множители, выполним действия и сократим дробь. Получаем: $\frac{36^3 \cdot 15^2}{18^4 \cdot 10^3} =$

$$= \frac{(2^2 \cdot 3^2)^3 \cdot (3 \cdot 5)^2}{(2 \cdot 3^2)^4 \cdot (2 \cdot 5)^3} = \frac{2^6 \cdot 3^6 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{2^4 \cdot 3^8 \cdot 2^3 \cdot 5^3} = \frac{2^6 \cdot 3^8 \cdot 5^2}{2^7 \cdot 3^8 \cdot 5^3} = \frac{1}{2 \cdot 5} = \frac{1}{10} = 0{,}1.$$

Ответ: 0,1.

4. Построим график функции $y = x - 1$ при $x < 2$ (луч AB) и функции $y = 5 - 2x$ при $x \geq 2$ (луч BC). Графиком данной функции является ломаная ABC. Построим также семейство горизонтальных прямых $y = a$. Легко сообразить, что при $a < 1$ графики пересекаются в двух точках (т. е. уравнение имеет два корня), при $a = 1$ – в одной точке (один корень), при $a > 1$ точек пересечения нет (уравнение корней не имеет).



Ответ: при $a < 1$ – 2 корня, при $a = 1$ – один корень, при $a > 1$ – 0 корней.

5. Пусть первое число равно x, второе – y. По условию задачи получаем систему уравнений $\begin{cases} x+y=100, \\ 0,25x+0,75y=59 \end{cases}$ или $\begin{cases} x+y=100, \\ x+3y=236. \end{cases}$ Решая эту систему, например, способом сложения, найдем $y = 68$ и $x = 32$.

Ответ: 32 и 68.

6. Перенесем все члены уравнения $(x-2)(5x+3)=(x-2)(3x-5)$ в левую часть и разложим ее на множители. Получаем: $(x-2)(5x+3) - (x-2)(3x-5)=0$, или $(x-2)(5x+3-3x+5)=0$, или $(x-2)(2x+8)=0$. Так как произведение двух множителей равно нулю, то один из этих множителей равен нулю. Получаем два линейных уравнения: $x-2=0$ (его корень $x=2$) и $2x+8=0$ (корень $x=-4$). Итак, данное уравнение имеет два корня: $x=2$ и $x=-4$.

Ответ: $x=2$ и $x=-4$.

Вариант 2

1. Используем формулы квадрата суммы и разности квадратов, приведем подобные члены и упростим данное выражение. Получаем: $(2a+b)^2-(2a-3b)(3b+2a)-10b^2=4a^2+4ab+b^2-(4a^2-9b^2)-10b^2=$ $=4a^2+4ab+b^2-4a^2+9b^2-10b^2=4ab$. Найдем значение этого выражения при $a=\frac{1}{4}$, $b=3$. Имеем: $4\cdot\frac{1}{4}\cdot 3=3$.

Ответ: $4ab$, 3.

2. Прежде всего разложим числители и знаменатели дробей на множители и сократим их: $\frac{4(2x-1)(2x+1)}{14(2x-1)}+\frac{(3x-5)(3x+5)}{4(3x+5)}=3$. Умножим все члены уравнения $\frac{4x+2}{7}+\frac{3x-5}{4}=3$ на число 28. Получаем равносильное уравнение $\frac{4x+2}{7}\cdot 28+\frac{3x-5}{4}\cdot 28=3\cdot 28$, или $(4x+2)\cdot 4+$ $+(3x-5)\cdot 7=84$, или $16x+8+21x-35=84$, или $37x=111$, откуда $x=3$.

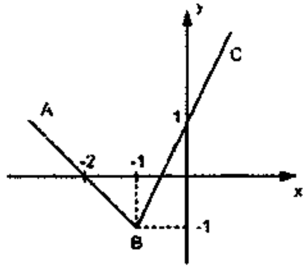
Ответ: $x=3$.

3. Разложим числа, входящие в выражение, на простые множители, выполним действия и сократим дробь. Получаем: $\frac{22^4\cdot 3^3}{6^2\cdot 121^2}=$

$$=\frac{(2\cdot 11)^4\cdot 3^3}{(2\cdot 3)^2\cdot(11^2)^2}=\frac{2^4\cdot 11^4\cdot 3^3}{2^2\cdot 3^2\cdot 11^4}=2^2\cdot 3=12.$$

Ответ: 12.

4. Построим график функции $y = -x - 2$ при $x \le -1$ (луч AB) и функции $y = 2x + 1$ при $x > -1$ (луч BC). Графиком данной функции является ломаная ABC. Построим также семейство горизонтальных прямых $y = a$. Легко сообразить, что при $a < -1$ графики не пересекаются (т.е. уравнение корней не имеет), при $a = -1$ – графики пересекаются в одной точке (один корень), при $a > -1$ – пересекаются в двух точках (уравнение имеет два корня).



Ответ: при $a < -1$ – 0 корней; при $a = -1$ – один корень; при $a > -1$ – два корня.

5. Пусть первое число равно x, второе число равно y. По условию их сумма равна 90. Поэтому получаем первое уравнение $x + y = 90$. Один процент от числа x равен $x/100$, тогда 75% числа x равны $\frac{x}{100}\cdot 75 = \frac{3}{4}x$. Один процент от числа y равен $y/100$, тогда 50% числа y равны $\frac{y}{100}\cdot 50 = \frac{y}{2}$. По условию сумма чисел $\frac{3}{4}x$ и $\frac{y}{2}$ равна 61. Поэтому получаем второе уравнение $\frac{3}{4}x + \frac{y}{2} = 61$.

Имеет систему двух линейных уравнений $\begin{cases} x + y = 90, \\ \frac{3}{4}x + \frac{y}{2} = 61. \end{cases}$ Решим систему способом подстановки. Из первого уравнения выразим $y = 90 - x$ и подставим это выражение во второе уравнение. Получаем линейное уравнение с одной неизвестной: $\frac{3}{4}x + \frac{90 - x}{2} = 61$. Умножим все члены уравнения на число 4 и получим: $\frac{3}{4}x\cdot 4 + \frac{90 - x}{2}\cdot 4 = 61\cdot 4$, или $3x + (90 - x)\cdot 2 = 244$, или $3x + 180 - 2x = 244$, или $x + 180 = 244$, откуда $x = 64$. Используя формулу $y = 90 - x$, найдем $y = 90 - 64 = 26$.

Ответ: первое число 64, второе число 26.

6. Перенесем все члены уравнения $(x-3)(6x+5) = (x-3)(2x-3)$ в левую часть и разложим ее на множители. Получаем: $(x-3)(6x+5) - (x-3)(2x-3) = 0$, или $(x-3)(6x+3-2x+3) = 0$, или $(x-3)(4x+8) = 0$. Так как произведение двух множителей равно нулю, то один из этих множителей равен нулю. Получаем два линейных уравнения: $x-3=0$ (его корень $x=3$) и $4x+8=0$ (корень $x=-2$). Итак, данное уравнение имеет два корня: $x=3$ и $x=-2$.

Ответ: $x=3$ и $x=-2$.

Урок 108. Подведение итогов обучения

Цель: анализ результатов обучения и успехов учащихся.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Основная часть

1. Анализ прохождения материала (темы, которые усвоены хорошо, и темы, которые усвоены недостаточно, с указанием причин: невнимательность, незнание основных формул, арифметические ошибки).

2. Личные успехи и недочеты каждого учащегося, рекомендации по улучшению успеваемости.

3. Краткая характеристика следующего учебного года (изучаемые темы, их применение в прикладных задачах).

4. Пожелания учащимся.

Литература

1. *Алимов Ш.А., Колягин Ю.М., Сидоров Ю.В. и др.* Алгебра: учебник для 7 класса / Под ред. А.Н. Тихонова. – М.: Просвещение, 2001.

2. *Васюк Н.В., Мартиросян М.А., Слепенкова Е.В. и др.* Дидактические материалы по алгебре для 7 класса. – М.: Издат-школа, 2000.

3. *Гусев В.А., Мордкович А.Г.* Математика. Справочные материалы. – М.: Просвещение, 1988.

4. *Звавич Л.И., Кузнецова Л.В., Суворова С.Б.* Дидактические материалы по алгебре для 7 класса. – М.: Просвещение, 2002.

5. *Звавич Л.И., Шляпочник Л.Я., Козулин Б.В.* Контрольные и проверочные работы по алгебре для 7 класса. – М.: Дрофа, 2002.

6. *Игнатьев Е.В.* В царстве смекалки. – М.: Наука, 1982.

7. *Кострикина Н.П.* Задачи повышенной трудности в курсе алгебры 7–9 классов (книга для учителя). – М.: Просвещение, 1991.

8. *Короткова Л.М., Савинцева Н.В.* Алгебра: Тесты: Рабочая тетрадь. 7 класс. – М.: Рольф, 2002.

9. *Куликова О.В., Рурукин А.Н., Сафарова Ю.А.* Алгебра. 7 класс. Сборник решений задач. – М.: Яхонт, 2001.

10. *Лебидько В.В., Рурукин А.Н.* Математика. Алгебра и геометрия. Для учащихся 7 класса. – М.: МИФИ, 2001.

11. *Лебидько В.В., Рурукин А.Н.* Алгебра. 7 класс. Сборник решений задач. – М.: Яхонт, 2002.

12. *Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г., Нешков К.И. и др.* Алгебра: учебник для 7 класса / Под ред. С.А. Теляковского. – М.: Просвещение, 2000.

13. *Миндюк М.Б., Миндюк Н.Г.* Разноуровневые дидактические материалы по алгебре. 7 класс. – М.: Генжер, 2002.

14. *Миркина А.М., Рурукин А.Н., Сергеев А.М. и др.* Алгебра. 7 класс: Сборник решений задач. – М.: Яхонт, 2002.

15. *Мордкович А.Г.* Алгебра: учебник для 7 класса. – М.: Мнемозина, 2008.

16. *Мордкович А.Г., Александрова Л.А., Мишустина Т.Н. и др.* Алгебра: задачник для 7 класса. – М.: Мнемозина, 2008.

17. *Перельман Я.И.* Живая математика. – М.: Наука, 1978.

18. *Перельман Я.И.* Занимательная алгебра. – М.: Наука, 1970.

19. *Рурукин А.Н.* Математика: Пособие для интенсивной подготовки к выпускному, вступительному экзаменам и ЕГЭ по математике. – М.: ВАКО, 2004.

20. *Хачатурьян И.В.* Практическое руководство по решению задач по алгебре в 7–9 классах. – М.: Яхонт, 2000.

Оглавление